

LA ESTIMACIÓN EN LA MEDIDA DE LONGITUD:  
LA FOTOGRAFÍA COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE

MIGUEL ALEJANDRO NITOLA  
ZABALA

DIRECTOR:

ENRIQUE MATEUS NIEVES  
Candidato a Doctor en Educación Matemática

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

LÍNEA DE INVESTIGACION: PEDAGOGÍA Y  
DIDÁCTICA DEL LENGUAJE, LAS  
MATEMÁTICAS Y LAS CIENCIAS.

BOGOTÁ D.C.

MARZO 2018

ESTIMACIÓN: FOTOGRAFIA COMO PROPUESTA DIDÁCTICA DE APRENDIZAJE

LA ESTIMACIÓN EN LA MEDIDA DE LONGITUD:  
LA FOTOGRAFÍA COMO HERRAMIENTA DE APRENDIZAJE

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en Educación

MIGUEL ALEJANDRO NITOLA  
ZABALA

DIRECTOR:

ENRIQUE MATEUS NIEVES  
Candidato a Doctor en Educación Matemática

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

LÍNEA DE INVESTIGACION: PEDAGOGÍA Y  
DIDÁCTICA DEL LENGUAJE, LAS  
MATEMÁTICAS Y LAS CIENCIAS.

BOGOTÁ D.C.

MARZO 2018

## **AGRADECIMIENTOS**

A la Universidad Externado de Colombia.

Al Prof. Enrique Mateus Nieves, Director de este proyecto por su colaboración, empeño dedicación y vocación al servicio.

A todas aquellas personas que de una u otra manera contribuyeron a la realización de la presente investigación.

## **DEDICATORIA**

En principio agradecer a Dios por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor. A mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación tanto académica como de la vida, por su incondicional apoyo a través del tiempo y sobre todo a mi amada esposa Eymy Loreнна, por el apoyo y ánimo que me brinda día a día para alcanzar nuevas metas profesionales y personales. A mi primer bebe Mariangel que viene en camino, por ser el motor en la culminación de un trabajo de esfuerzo y dedicación.

Gracias a ustedes, ya que fueron de gran importancia para la culminación con éxito de este proyecto de investigación

Resumen Analítico en Educación -RAE	
1. Información general	
Tipo de documento	Tesis de Maestría
Acceso al documento	Universidad Externado de Colombia. Biblioteca Central
Título del documento	La estimación en la medida de longitud: la fotografía como propuesta didáctica de aprendizaje
Autor	Nitola Zabala Miguel Alejandro
Director	Mateus Nieves Enrique
Palabras claves	Estimación, medidas de longitud, unidad de medida, fotografía, aproximación, aprendizaje de la estimación.
2. Descripción	
Esta investigación presenta la manera como puede incidir la fotografía como herramienta respecto a la capacidad estimativa de medidas de longitud en un grupo de estudiantes del grado décimo del Colegio el tesoro de la Cumbre.	
3. Fuentes	
Para la realización de esta investigación se consultaron 7 libros, 8 artículos de investigación, 2 documentos del Ministerio de Educación Nacional, 3 tesis de maestría nacionales y una tesis de doctorado de España, para un total de 21 fuentes.	
4. Contenidos	
La investigación está estructurada en cinco capítulos. En líneas generales, los capítulos uno y dos recogen el problema de investigación y el marco teórico; en el capítulo tres se describe la metodología utilizada; en el capítulo cuatro se analizan los datos y se extraen resultados; para finalizar con el capítulo 5 donde se presentan conclusiones de la investigación, aportaciones y recomendaciones.	
5. Metodología	
El tipo de investigación que se desarrolló para este trabajo fue la Investigación Acción, el modelo de investigación que se tuvo cuenta fue el <i>crítico-social</i> , pues a partir de una situación social se buscó mejorar la calidad de la acción dentro de la misma (Elliot, 1993), en el caso particular la situación social fue la capacidad estimativa de los estudiantes de grado décimo del Colegio el Tesoro de la Cumbre (I.E.D) y la acción fueron las tareas cuidadosamente secuenciadas (basadas en la fotografía).	
6. Conclusiones	

-Conocer la didáctica de la disciplina que enseña, permite identificar y construir relaciones de tipo pedagógico, teórico dentro de las matemáticas y dentro de otras ciencias, las cuales enriquecen el proceso de enseñanza aprendizaje; en éste sentido se debe asumir una actitud investigativa frente a todo lo que se aprenda y se enseñe, se observe, se escuche y experimente, como se pudo constatar con el desarrollo de éste trabajo y así ser un docente con habilidades investigativas para asumirlo como un estilo de vida dentro y fuera del aula.

-A medida que los estudiantes desarrollaban cada una de las situaciones de la secuencia didáctica, mejoraban su precisión y la variación de esas precisiones dependían de las características de las longitudes de los objetos a medir, a medida que estimaban en cada fotografía su precisión mejoraba con la práctica; diversos investigadores (Siegel, 1982; Sowder, 1992; Callís, 2002) han manifestado que la magnitud longitud es una de las más adecuadas para mejorar la precisión cuando se trabaja secuencialmente un conjunto de actividades, como se pudo verificar una vez aplicada la secuencia en comparación con la prueba diagnóstica.

-La investigación permitió comprobar, que los estudiantes que tienen mayor capacidad para estimar son aquellos que no tienen dificultades conceptuales asociadas a la magnitud y a su medida, y tienen dominio de ciertas componentes asociadas a la estimación como son: la interiorización de referentes y/o la interiorización de unidades de medida, y saben usar adecuadamente la estrategia elegida.

-La precisión que se pudo alcanzar al estimar utilizando como propuesta la fotografía dependió fundamentalmente de dos factores, la interiorización de los referentes o unidades de medida que se usaron, y, por otra parte, la familiarización de los estudiantes con los diferentes objetos mostrados que no estaban realmente ante sus ojos, sino a través de fotografías. Esta investigación apoya entonces, la propuesta de Hildreth (1983), respecto al aprendizaje de diferentes estrategias en las escuelas; pues se pudo evidenciar que la fotografía al involucrar el uso de referentes, aumentó en los estudiantes su capacidad de estimación.

-Mediante la comparación entre los resultados del diagnóstico y la secuencia didáctica, se ha comprobado la incidencia de la práctica en diferentes aspectos de la capacidad estimativa. La precisión desarrollada en las estimaciones mejoró notablemente las capacidades analíticas de composición y descomposición en los estudiantes a través del desarrollo de la secuencia didáctica, evidenciado con una considerable disminución en las falencias presentadas en primera instancia. Por tanto, la investigación verificó que la capacidad estimativa mejora con la práctica, ya puesta de manifiesto por investigadores: Bright (1976), Callís (2002) quienes afirmaban, por una parte, que la enseñanza de la estimación no se refuerza lo suficiente en las escuelas y por otra parte, la importancia de practicar: “la formación académica no potencia la adquisición de capacidades de estimación métrica... la capacidad estimativa se adquiere fundamentalmente por la práctica y la incidencia de la formación académica resulta ser poco significativa para dicha adquisición” (Callís y Fiol, 2006, p. 111)

-La fotografía como herramienta de aprendizaje de la estimación constituye un campo de entrenamiento para el manejo de conceptos y destrezas relativos a la magnitud y a su medida (percepción y comparación), al mismo tiempo que constituye un campo de trabajo que permite detectar deficiencias conceptuales y procedimentales básicas (conversión de medidas, reconocimiento del sistema internacional, estimación en cálculo) coincidiendo en las ideas de aquellos investigadores que ven la estimación como una herramienta útil para la enseñanza de otros conceptos (Bright, 1976; Segovia et al. 1989; Whitin, 2004).

La principal ventaja de la metodología utilizada es que permitió adaptar la instrucción tanto al punto de partida como al ritmo de aprendizaje de los estudiantes. Situación que se consideró en el diseño de cada una de las situaciones. (Véase tabla 5). Los inconvenientes más destacados de esta metodología son los siguientes: En primer lugar, que como el diseño de cada sesión necesitaba de un proceso de retroalimentación de la situación anterior, reflexión y conexión con los contenidos teóricos existentes fue necesario disponer de un espacio de tiempo considerable entre situación y situación.

El hecho de que el profesor sea uno de los investigadores puede ser considerado una limitación, pues la investigación puede influir en su docencia. En este sentido se tuvo presente que el desarrollo de esta investigación no debía influir en el trabajo diario que se desarrollaba en el aula. Bajo esta premisa la fórmula del profesor-investigador pudo convertirse en una ventaja, pues se pudo controlar que aprendizajes estaban recibiendo los estudiantes al margen del trabajo empírico propio de la investigación. Finalmente se pone de manifiesto que esta metodología permite avanzar en sus conocimientos tanto al profesor como a los estudiantes.

## Tabla de Contenido

<b>1. Definición del Problema</b>	<b>1</b>
1.1 Formulación del Problema de Investigación	1
1.2 Pregunta de Investigación	2
1.3 Objetivos de la Investigación	2
1.3.1 Objetivo general	3
1.3.2 Objetivos específicos	3
1.4 Justificación del Problema	3
<b>2. Marco de Referencia</b>	<b>5</b>
2.1 Antecedentes de la Investigación	5
2.2 Magnitud y Medida	7
2.2.1 Magnitud	8
2.2.2 Medida	9
2.2.3 Clasificación de las magnitudes	11
2.3 Unidad de Medida	13
2.4 Estimación y Tipos de Estimación	14
2.4.1 Estimación	14
2.4.2 Estimación de la medida	15
2.4.3 Tipos de estimación	15
2.4.4 Tipo de estimación para la investigación	16
2.5 Estimación y Aproximación	16
2.6 Aprendizaje de la Estimación y la Medida, Magnitudes y su Medida	17
2.6.1 Aprendizaje de la medida y la estimación	17
2.6.2 Aprendizaje de las magnitudes y medida	20
2.7 Fotografía	23
<b>3. Diseño Metodológico</b>	<b>24</b>
3.1 Enfoque de Investigación	24
3.2 Tipo de Investigación	24
3.3 Población y Muestra de la Investigación	26
3.3.1 Participación de la muestra	26
3.4 Categorías de Análisis	26
3.4.1 Categorías de Análisis	27
3.4.2 Matriz categorial	30

3.5	Instrumentos y Recolección de Información.....	34
3.5.1	Instrumentos.....	34
3.5.2	Recolección de información. ....	34
3.6	Validez .....	35
3.7	Consideraciones Éticas.....	35
3.8	Diseño de la Intervención.....	35
3.9	Objetivos de la intervención.....	36
3.10	Metodología de la Intervención y Enfoque Pedagógico .....	37
3.11	Fases de la Intervención .....	38
4.	<b>Análisis y Resultados</b> .....	39
4.1	Prueba Diagnóstica.....	39
4.1.1	Análisis y Resultados.....	39
4.1.2	Discusión.....	47
4.2	Fases de Intervención .....	49
4.2.1	Análisis y Resultados.....	49
4.2.2	Discusión.....	56
5.	<b>Conclusiones</b> .....	59
5.1	Conclusiones .....	59
5.2	Recomendaciones.....	63
5.3	Limitaciones del Estudio.....	64
	<b>Referencias</b> .....	65
	<b>Anexos</b> .....	69
	Anexo 1 .....	69
	Prueba Diagnóstica .....	69
	Anexo 2 .....	78
	Guía 1: Medidas de Longitud. ....	78
	Guía 2: Aplica lo Aprendido .....	87
	Anexo 3 .....	90
	Guía 3: Estimación y Medidas de Longitud .....	90
	Anexo 4 .....	97
	Guía 4: Fotografía y Estimación.....	97
	Anexo 5 .....	101
	Observaciones de la Pertinencia de las Actividades con el Trabajo de Investigación ...	101



### Índice de Tablas

Tabla 1. Enfoques del Concepto de Magnitud.....	8
Tabla 2. Aportaciones de Bright, Hildreth, Castro, Rico y Castro, Callis de los conceptos de estimación en medidas. ....	18
Tabla 3. Aportaciones de Piaget, Inhelder y Szeminska, Inskip, Chamorro y Callís.....	21
Tabla 4. Matriz categorial Codificada .....	31
Tabla 5. Objetivos de la Secuencia didáctica.....	37
Tabla 6. Caracterización del diagnóstico .....	41
Tabla 7. Caracterización de la Guía 1 y Guía 2 de la Secuencia Didáctica.....	50
Tabla 8. Aciertos y dificultades de la Guía 1 y Guía 2 de la categoría MM.....	52
Tabla 9. Caracterización de la Guía 3 de la Secuencia Didáctica.....	53
Tabla 10. Aciertos y dificultades de la situación 2 de la categoría ES .....	54
Tabla 11. Caracterización de la Guía 4 de la Secuencia Didáctica.....	55
Tabla 12. Aciertos y dificultades de la situación 3 de la categoría F.....	56

### Índice de Figuras

Figura 1. Categorías que permiten hacer estimaciones razonables .....	15
Figura 2. Diseño y secuencia de la intervención.....	36

## **1. Definición del Problema**

### **1.1. Formulación del problema de investigación**

El problema surge en una de las primeras clases de trigonometría realizada a los estudiantes de grado 1001 y 1002 del Colegio el Tesoro de la Cumbre (I.E.D) por el docente investigador. La clase en particular es una de las primeras como se mencionó anteriormente pues también se empiezan a conocer los grupos debido a que se sustituye al maestro que veía con ellos desde hace un año. Cuando hay un acercamiento con los grupos. Esto facilitó el desarrollo de actividades exploratorias o diagnóstica con el fin de que los estudiantes estimaran (objeto de estudio) la medida de diversos objetos de dos dimensiones que se encontraban en el aula. Así se detectó que muchos estudiantes subestimaban cuando se les proponían tareas de estimación relativas a longitud, lo que muestra que no hay coherencia en el uso de la unidad de medida escogida y el objeto a medir. (Castillo, 2012)

Teniendo en cuenta que en las matemáticas escolares se encuentran cinco tipos de pensamientos enunciados en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, por el Ministerio de Educación Nacional (2006), siendo estos: el pensamiento numérico, el pensamiento espacial y el métrico, el pensamiento métrico - variacional y el pensamiento aleatorio; para esta investigación pretende abordar el pensamiento métrico y los sistemas métricos, en donde, tanto los conceptos como los procedimientos propios de este pensamiento hacen referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones, específicamente se centrará en el siguiente concepto y procedimiento, siendo el punto de partida de la investigación:

La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”<sup>1</sup>.

Ahora bien, la mayoría de las personas estiman medidas de manera cotidiana como lo afirma Castillo (2012) calculan a qué distancia está el trabajo o el sitio al cual se van a dirigir, a qué hora se tienen que levantar para llegar a tiempo a un sitio específico, cuántas libras de arroz deben caber en medio litro de agua, qué cantidad de harina se necesita para elaborar una empanada, cuántos cubos de azúcar se depositan en una bolsa para que pesen una libra, etc. Estos cuestionamientos son de gran utilidad práctica en la vida real, pero al mismo tiempo abren la posibilidad de realizar otro tipo de interrogantes, por ejemplo, ¿Qué factores afectan la precisión de las estimaciones? ¿Cuál es la unidad de medida apropiada cuando se realiza una medición (Castillo, 2012), de esta manera esta investigación trata de ofrecer respuesta a algunas de las preguntas planteadas anteriormente mediante una herramienta: ¿la fotografía, enfocándose en la estimación de medidas de cantidades de longitud en las diferentes fotografías que los estudiantes tomarán a los objetos que sean de su gusto?

### **1.2. Pregunta de investigación**

¿Cómo incide en el aprendizaje de la estimación, específicamente en la medida de longitudes, en estudiantes de grado décimo del (I.E.D) Colegio el Tesoro de la cumbre, una propuesta didáctica basada en la fotografía?

### **1.3. Objetivos de la investigación**

---

<sup>1</sup> Para esta investigación “capturar lo continuo con lo discreto” hace referencia a la relación íntima de los conceptos de medida y conteo.

**1.3.1. Objetivo general.** Determinar cómo incide el uso de la fotografía como propuesta didáctica, en el aprendizaje de la estimación, específicamente en la medida de longitudes, en estudiantes de grado décimo del (I.E.D) Colegio el Tesoro de la cumbre.

**1.3.2. Objetivos específicos.** Realizar un diagnóstico a los estudiantes de grado décimo del (I.E.D) Colegio el Tesoro de la cumbre en tareas de estimación de medidas de longitud.

Diseñar y Aplicar una propuesta didáctica basada en la fotografía a partir de los resultados del diagnóstico a los estudiantes de grado décimo del (I.E.D) Colegio el Tesoro de la cumbre para el aprendizaje de la estimación específicamente en la medida de longitudes.

Identificar el grado de comprensión de los estudiantes de grado décimo en relación con la estimación de medidas y su trascendencia en el ámbito educativo después de haber aplicado la secuencia didáctica.

#### **1.4. Justificación del problema**

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias (2006), emitidos por el Ministerio de Educación Nacional proponen formar ciudadanos críticos con el apoyo interdisciplinar. Ahora bien, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas busca formar ciudadanos, que puedan aplicar sus conocimientos en diferentes contextos, tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, opinar, ser receptivo a los demás y plantear soluciones frente a problemas cotidianos. Considerando lo anterior y tomando como eje central la estimación de medida, objeto de investigación de este trabajo, se pretende que a través de la fotografía como herramienta, se pueda realizar un trabajo interdisciplinar de aprendizaje

incorporando una nueva forma de hacer matemáticas relacionada con el uso de estrategias personales de interpretación y valoración de resultados que están presentes en la cotidianeidad (Segovia y Rico, 1996).

Dentro de la revisión de los antecedentes se encontró las razones por las cuales se debería enseñar a estimar, tales como la utilidad en la vida diaria, escolar y de potencialización del pensamiento. Con esta investigación se refuerza la concepción que se tiene con relación a la estimación, específicamente de la medida como parte fundamental de los conceptos, procesos y competencias referentes al número y la medida y se considera que los aportes ofrecidos desde lo conceptual y lo didáctico por lo cual pueden enriquecer a los maestros en Educación Matemática. (Rodríguez, 2010).

## 2. Marco de Referencia

### 2.1. Antecedentes de la investigación

En el desarrollo de este trabajo se realizó una continua búsqueda de investigaciones que estuviesen relacionados con *estimación*, específicamente con la *estimación de medidas*. A partir de la búsqueda se evidenció pocos estudios de éste objeto de estudio, por ejemplo Sowder (1992) citado por Agudelo (2009, p. 6) menciona la escasez de investigaciones realizadas sobre *estimación de medida*; ahora bien, otros investigadores también han expresado esta idea; Siegel (1982) citado por Castillo (2012, p. 78) menciona que “aunque la literatura en educación matemática ha argumentado repetidamente la importancia de la estimación en el currículo elemental e intermedio de matemáticas, sorprendentemente hay poco énfasis en las investigaciones o en el desarrollo curricular de las técnicas de estimación.”

Ahora bien, al realizar la revisión bibliográfica, entre los antecedentes centrados o relacionados con la *estimación de medidas* que contextualizan esta investigación se destacan los aportes de los trabajos referidos a continuación:

Segovia y De Castro (2007) realizaron un estudio llamado *La investigación en estimación en cálculo*, en el que resaltan la importancia de estimar magnitudes continuas y discretas. Los investigadores también indagan el papel de la estimación en el currículo escolar en donde la recalcan como una competencia que relaciona diferentes componentes de tipo afectivo, conceptual y técnico, facilitando la comprensión de la cuantificación de las magnitudes y mejorando su interpretación, puesto que es un aspecto con el cual están muy familiarizados los estudiantes.

Rodríguez (2010) llevó a cabo un estudio denominado *Actividades para desarrollar la habilidad de estimar, con las unidades de longitud en escolares de 5° grado de la educación primaria*, en esta investigación se proponen actividades para la medición en las unidades de longitud, a través de las cuales se busca desarrollar la habilidad de estimar, utilizando estrategias que permiten establecer el nivel del desarrollo en el que se encuentran los estudiantes. Esta autora centra su estudio en torno a la distinción entre los términos de *habilidad y estimar* desde la óptica de la Matemática Educativa, recalcando la manera para potenciar dicha habilidad.

La autora al hacer un recorrido por el estado de la *habilidad de estimar* en las escuelas de primaria en Cuba, encuentra limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la estimación, puesto que los estudiantes no responden a los niveles que son establecidos por su país y los docentes manifiestan que casi siempre trabajan la magnitud longitud y la estimación estrictamente con los ejercicios planteados por los libros de texto propios de cada grado.

Uno de los aportes que hace Rodríguez (2010) para esta investigación, es legitimar la posibilidad de potenciar la habilidad de estimar, siempre y cuando las tareas de estimación diseñadas sean estudiadas previamente por el investigador, para que respondan a las necesidades propias de la magnitud que se esté trabajando. De ésta manera, siendo la fotografía la herramienta que se empleará en ésta investigación se usará como herramienta planeada y dirigida adecuadamente a las necesidades de los estudiantes.

En el trabajo de Castillo (2012) se realizó un estudio denominado “*Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: longitud y superficie*”, llevando a cabo una descripción y caracterización de la capacidad estimativa en longitud y superficie de un grupo de estudiantes de secundaria, indagando las causas que provocaron a que incurrieran en errores al realizar estimaciones, también abarca un área variada en conceptos, habilidades, procesos

que se refieren tanto a la medida como a la estimación, en los cuales destacó los trabajos de Inskep, Callis y Wheeler, Hildreth, Chamorro, Siegel. Lo interesante del estudio es que se han dejado planteadas algunas hipótesis sobre los motivos que provocan que se subestime en unas tareas y se sobrestime en otras, aspecto que se puede tener como referencia al momento de la elaboración de las tareas propuestas por el investigador para este estudio.

Finalmente es pertinente mencionar consideraciones que han tenido algunas de las directrices internacionales: Informe Cockcroft<sup>2</sup> (1982), National Science Board<sup>3</sup> (1983), National Council of Teachers of Mathematics<sup>4</sup> (2000), Pisa<sup>5</sup> (2003) respecto al objeto de estudio de esta investigación, la primera es que hacen énfasis al tópico de las magnitudes, pues estas directrices lo consideran necesario para que los futuros ciudadanos lo dominen manera clara y efectiva. La segunda es la importancia de mencionar al número como eje fundamental para realizar estimaciones y aproximaciones aceptables, los cuales permiten realizar cálculos mentales sencillos.

En este apartado se presenta la contribución de diferentes autores fuente para esta investigación. Se inicia con los conceptos de magnitud y medida pues son puntos de partida para referirse al objeto de estudio, para luego enfocarse en el aprendizaje de la estimación de medidas de longitud.

## **2.2. Magnitud y medida**

---

2 Informe oficial de Inglaterra y Gales que el Ministerio de Educación y Ciencia español publicó en Madrid en 1985.

3 Agencia del gobierno estadounidense independiente, que impulsa investigación y educación fundamental en todos los campos no médicos de la Ciencia y la Ingeniería. En adelante

4 National Council of Teachers of Mathematics, organización profesional internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes.

5 Programme for International Student Assessment, organismo encargado de medir cómo los futuros ciudadanos de los países pertenecientes a la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) están preparados para los desafíos del siglo XXI.



**2.2.1. Magnitud.** Al analizar el concepto de magnitud y medida se debe tener en cuenta un aspecto que parece evidente: “para medir, previamente hay que saber qué se mide” (Frías, Gil & Moreno, 2001, p. 477) por lo que es pertinente hablar de las cualidades o atributos que poseen las cosas, en donde dicho término ha sido tratado a través de la historia por diferentes filósofos y desde diferentes perspectivas. Entre estos autores se encuentra Aristóteles quién afirma que:

La cualidad es aquello en virtud de lo cual alguien tiene algo, es decir, la cualidad es algo perteneciente a la “gente”. Puede extenderse esta concepción entendiendo que las cualidades son propiedades como “es blanco”, “es alto”, “es estúpido”, etc., pero puede ampliarse esta definición de la cualidad afirmando que la cualidad es aquello en virtud de lo cual alguna cosa tiene alguna propiedad: alto, hermoso, rugoso, redondo, etc. (Frías, Gil & Moreno, 2001, p.478).

En la tabla 1 se presenta diferentes enfoques del concepto de magnitud:

Tabla 1  
*Enfoques del Concepto de Magnitud*

<b>Autor</b>	<b>Enfoque</b>
<b>Aristóteles</b>	Aristóteles afirmaba que magnitud es una cantidad que puede medirse. Un cambio en la cantidad era producido por la adición de partes homogéneas.
<b>Descartes</b>	Clasificaba las cualidades de los cuerpos en cualidades primarias y secundarias, las primeras son aquellas que se derivan de la realidad fundamental de los cuerpos, son objetivas, intrínsecas e independientes de quien las percibe y las segundas que no son más que los sentimientos.
<b>Bertrand Rusell</b>	Liga el concepto de magnitud a los de orden y divisibilidad. Las magnitudes son aquellos conceptos susceptibles de un orden y dentro de ellas; diferencia entre extensivas, aquellas que son divisibles y por tanto aditivas, e intensivas.

<b>Fiol y Fortuny</b>	<p>Recogen varias definiciones de diferentes autores para la magnitud:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Todo lo que es capaz de aumento o disminución.</li> <li>-Las magnitudes son entes abstractos entre los cuales se puede definir la igualdad y la suma.</li> </ul> <p>“Un conjunto no vacío <math>M</math>, con relaciones de orden (<math>&lt;</math>) y una operación interna (<math>+</math>) tal que si <math>a, b, c \in M</math> se verifican las siguientes propiedades:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Ordenación: <math>a &lt; b</math>, ó <math>a = b</math>, ó <math>b &lt; a</math></li> <li>2. Transitiva: Si <math>a &lt; b</math> y <math>b &lt; c</math>, entonces <math>b &lt; c</math></li> <li>3. Propiedad Asociativa: <math>(a + b) + c = a + (b + c)</math></li> <li>4. Simplificación: Si <math>a + c = b + c</math>, entonces <math>a = b</math></li> <li>5. Propiedad Conmutativa: <math>a + b = b + a</math></li> <li>6. Diferencia: <math>a &lt; b</math>, si y solo si existe <math>c</math> tal que <math>a + c = b</math></li> <li>7. Divisibilidad: Para cada <math>a</math> en <math>M</math> y <math>n</math> un número natural existe <math>b</math> en <math>M</math>, tal que <math>a = n \cdot b</math>, donde <math>n \cdot b = b + \dots + b</math> con <math>n</math> - sumandos.</li> <li>8. Postulado de Arquímedes: para cada <math>c</math> y <math>d</math> en <math>M</math> existe un número natural <math>n</math> tal que <math>d &lt; n \cdot c</math></li> </ol> <p>A los elementos de <math>M</math> se les llama cantidades. Al elegir en <math>M</math> un elemento <math>e</math> se le llama unidad.”</p>
<b>Diccionario de la Real Academia Española</b>	<p>El término “magnitud” se encuentra con la siguiente acepción de magnitud “Propiedad física que puede ser Medida: p. ej., la temperatura, el peso, etc.”.</p>

*Nota:* Enfoques del concepto de magnitud (Frías, Gil & Moreno, 200, p.p 477-478)

**2.2.2. Medida.** Ahora bien, al referirse de la medida se remonta al pasado, pues la necesidad de medir ha sido fundamental en grandes de las actividades de la vida diaria. A través de la historia cada grupo social ha utilizado sus propias unidades de medida, dependiendo de las necesidades y las tareas a las cuales fueran destinadas.

A lo referido a la medida hay dos de las acepciones de dicho término en el Diccionario de la Real Academia Española: “Acción y efecto de medir” y “Expresión del resultado de una medición”.

Duhalde, González (1996) citado por Agudelo (2013, p.p. 41-42), define la medida como un número obtenido a partir de la caracterización de algunas de las propiedades o cualidades de un objeto, no del objeto mismo; lo que supone la asignación de una unidad de medida y su repetición de tal forma que cubra todo el intervalo a medir, teniendo en cuenta que si la unidad de medida es mayor que la cantidad a medir ésta debe dividirse en subunidades.

Bressan y Yaksich (2001) citado por Agudelo (2013, p. 42), la medida, es el puente entre el mundo físico y la aritmética. Ya que para el primero, es el proceso por el cual se averigua cuántas veces está contenida la unidad en el objeto a medir y al pasar el otro lado del puente, es asignarle un número  $R^+$  a una cantidad.

En el mismo sentido, para Chamorro y Belmonte (1988) “medir supone asignar un número a una cantidad de magnitud” y desde el punto de vista estrictamente matemático, la medida de una magnitud respecto de una unidad es una aplicación que asocia a cada cantidad de magnitud un número real (Castillo, 2012).

Desde el punto de vista estrictamente matemático, la medida de una magnitud respecto de una unidad es una aplicación que asocia a cada cantidad de magnitud un número real: Dadas una magnitud,  $M$ , y una cantidad de magnitud,  $u \in M$ , que se le denomina unidad de medida, se puede definir la aplicación entre  $M$  y  $R^+$  como sigue:

$$med_u: M \rightarrow R^+$$

$$med_u(m): q \leftrightarrow m = q \cdot u$$

De la definición se deduce que la medida de una cantidad depende de la unidad elegida. Esta definición es adecuada para las magnitudes cuantitativas continuas, por ejemplo, la longitud, la estatura etc.

**2.2.3. Clasificación de las magnitudes.** Existen diferentes clasificaciones de las magnitudes. En particular, Godino et al., (2002) muestran su distinción de acuerdo a las propiedades que cumplen. Una primera distinción es magnitudes no medibles o intensivas y medibles o extensivas:

*Magnitud no medible o intensiva:* cuando no es posible, al menos en sentido físico directo, definir la suma en ellas y se caracterizan por un orden. Por ejemplo, los trabajadores de un frigorífico no experimentan un doble choque térmico solo porque la temperatura de la cámara frigorífica disminuya de  $-10^{\circ}\text{C}$  a  $-20^{\circ}\text{C}$ , es decir, la sensación de exposición a la temperatura no es directamente proporcional al cambio en la escala numérica.

*Magnitud medible o extensiva:* Es el caso contrario al anterior, cuando sí es posible definir la suma en ellas y se miden en una escala de razón. Por ejemplo: la longitud, el volumen, etc.

Otra clasificación podría ser debida a las unidades utilizadas en la medida de dicha magnitud, siendo estas cualitativas o cuantitativas. Las primeras se aplican de manera referencial o comparativa y pueden ser modificadas fruto de cada momento o circunstancia, en las segundas existe una unidad “u” que siempre tiene el mismo valor y, por lo tanto, cualquier cantidad de magnitud puede ser expresado de forma unívoca como producto de un número por dicha unidad.

Según la estructuración matemática, y por lo tanto centrado exclusivamente en las magnitudes cuantitativas, estas pueden diferenciarse en:

*Magnitud discreta:* Magnitud cuantitativa en la que no existen valores intermedios entre intervalos de medida, como es el caso de los números enteros.

*Magnitud escalar o continua:* Cuando la cantidad es arquimediana<sup>6</sup> con respecto a la ordenación total. Tiene, por lo tanto, infinitos términos entre dos intervalos  $[n, n + 1]$ ; de manera que siempre puede garantizarse la división de una cantidad de magnitud en un número de partes iguales, o también, que la medida siempre puede aproximarse indefinidamente.

Otra clasificación que se puede encontrar para las magnitudes es en magnitudes absolutas y relativas.

*Magnitud absoluta:* En ellas no existe para cada cantidad su opuesta para la suma, por lo tanto, es un semigrupo conmutativo y ordenado, dado que no tiene elemento simétrico. Como por ejemplo las longitudes, superficie, volumen, capacidad, etc.

*Magnitud relativa:* En este caso poseen un módulo y tienen una dirección, es decir, poseen elemento simétrico y por lo tanto resulta un grupo abeliano ordenado. La altura al nivel del mar es un ejemplo de esta magnitud.

La longitud será la magnitud estudiada en esta investigación, siendo esta una magnitud medible o extensiva, cuantitativa, continua y absoluta, por lo tanto los elementos o cantidades que forman parte del conjunto longitud, desde el campo matemático, son los segmentos; desde la práctica estos segmentos están asociados a las dimensiones de los objetos, largo, ancho y alto, a las distancias entre ellos y a las trayectorias de los objetos en movimiento y a través de la fotografía el estudiante captará un objeto de su interés en donde

---

<sup>6</sup> Teorema (Propiedad arquimediana). *Para todo par de elementos  $x, y \in R$ , con  $x > 0$ , existe un número entero  $n \in N$  tal que  $nx > y$*

se hará un estudio de la magnitud longitud (el objeto está en dos dimensiones) con la ayuda de la estimación.

### 2.3.Unidad de medida

El Diccionario de la Real Academia Española acerca del término “unidad” lo define como: “Cantidad que se toma por medida o término de comparación de las demás de su especie”.

Medir una magnitud se basa en comparar una unidad e indicar el número de veces en que esta unidad le es asignada. La existencia de la unidad, presupone necesariamente el valor del cero y la adopción de una escala métrica en base al valor unitario, la elección de un objeto físico, la unidad patrón, como modelo que es la unidad material de aplicabilidad. La formalización matemática del concepto de unidad es la siguiente:

Para poder definir unidad es necesario exigir a la magnitud,  $M$ , la existencia de algún elemento de  $M$  que, al multiplicarlo por todos los números reales positivos multiplicables por todos los elementos de  $M$ , genere todo el conjunto  $M$ . Es decir, sea  $S$  el subconjunto de números reales multiplicables por todos los elementos de  $M$ , debe existir un elemento  $u \in M$  de manera que para cualquier  $a \in M$  existe un  $r \in S$  tal que:

$$a = r \cdot u$$

Pues bien, al elemento  $u$  que cumple esa condición se le llama unidad.

La definición anterior se deduce que, para una magnitud determinada, la unidad no tiene porqué ser única. Esto provocó una problemática que hizo surgir sistemas de unidades que fueran aceptadas internacionalmente, como es el caso del S.I. (Sistema Internacional). La existencia de unidades es un elemento para clasificar las magnitudes (Castillo, 2006).

## **2.4. Estimación y tipos de estimación**

**2.4.1. Estimación.** La definición en el Diccionario de la Lengua Española de la Real Academia Española acerca del término “estimación” es: “Aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo”, esta definición está desde la perspectiva de tipo económica desenfocándose de las definiciones realizadas en el campo de la educación matemática en las últimas décadas. A continuación, se presentan distintas definiciones del concepto de estimación que responden a diferentes tipos de tareas matemáticas.

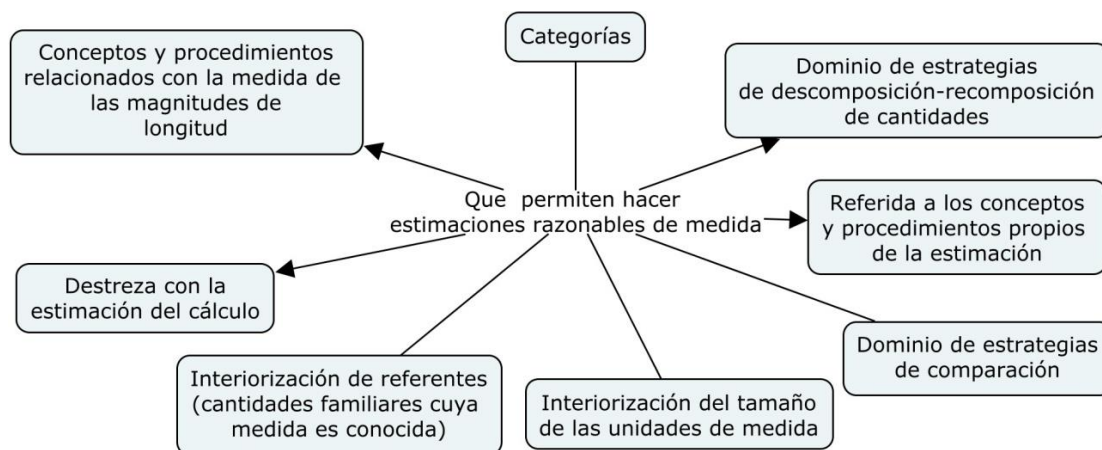
Una primera definición de estimar es la siguiente: “un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos” Bright (1976) citado por Pizarro (2015, p.40).

Una segunda definición considera la estimación como una “habilidad para evaluar si es razonable el resultado de un cálculo o de una medida; la capacidad de hacer juicios subjetivos acerca de una variedad de medidas” (Informe de Cockcroft, 1982, p 22).

Una tercera la define como “Juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales de quién los emite.” (Segovia, Castro, Rico y Castro, p. 18). Esta definición junto con la anterior plantea una conceptualización general para las estimaciones de cálculos numéricos y para la estimación de medida, aunque cada uno maneje sus propias particularidades

**2.4.2. Estimación de la medida.** Bright (1976) citado por Rico, Cañadas, Gutiérrez, Molina y Segovia (2013, p.p. 45-46) define la estimación en medida como el “proceso de obtener una medida sin la ayuda de herramientas de medición. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos”, es decir, basado únicamente en los conocimientos y experiencias con los cuales cuente el individuo. En lo que hay que tener claridad es el tipo de magnitud, que para la investigación es longitud siendo continua, en donde estas cantidades admiten una manipulación de las unidades. (Las discretas también lo admiten)

Teniendo en cuenta que para estimar la medida de una cantidad hay que saber medirla, son evidentes las necesidades conceptuales y procedimentales que permiten hacer estimaciones razonables de medida y que pueden estructurarse en categorías las cuales se mostrarán en la *figura 1*:



**Figura 1.**Elaboración propia en donde se presentan las categorías que permiten hacer estimaciones razonables de medida expuestas según Rico, Cañadas, Gutiérrez, Molina y Segovia (2013)

**2.4.3. Tipos de estimación.** De las definiciones anteriores se puede diferenciar dos tipos de estimación, que se denominan:

a) Estimación en Cálculo o Cálculo Estimativo.



#### b) Estimación en Medida

En el primer caso hace referencia a los juicios que pueden establecerse sobre los resultados de las operaciones aritméticas, mientras que en el segundo caso se refiere a la valoración que nos merece el resultado de una medida. De estas definiciones se deducen las siguientes características que enumera Segovia (1989) citado por Castillo (2012):

1. Consiste en valorar una cantidad o el resultado de una operación.
2. El sujeto que debe hacer la valoración tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.
3. La valoración se realiza por lo general de forma mental.
4. Se hace con rapidez y empleando números lo más sencillos posibles.
5. El valor asignado no tiene que ser exacto, pero sí adecuado para tomar decisiones.
6. El valor asignado admite distintas aproximaciones, dependiendo de quién realice la valoración.

**2.4.4. Tipo de estimación para la investigación.** La primera clasificación para esta investigación se ha mencionado en el apartado anterior, para este caso se basará en la estimación de medida, específicamente en estimación de cantidades de magnitudes continuas perceptibles visualmente como lo es la longitud. Esta clasificación fue planteada por Pareja (2001) citado por Castillo (2012, p.52)

#### **2.5. Estimación y aproximación**

Un concepto íntimamente ligado al de estimación es el de “aproximación”. El Diccionario de la Lengua Española de la Real Academia Española lo define como “la

máxima diferencia posible entre un valor obtenido en una medición o cálculo y el exacto desconocido [...]”. Y “aproximar” lo define como “Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado.”

A pesar de que estimación y aproximación son conceptos comúnmente alternados, existe una marcada diferencia entre ellos, derivada de las caracterizaciones de la estimación antes mencionadas.

Segovia y De Castro (2007), mencionan que “La aproximación enfatiza la cercanía al valor exacto y es totalmente controlable; se aproxima tanto como la situación lo precise, tiene como herramientas los teoremas de cálculo (aproximado) o teoría de errores, los algoritmos de lápiz y papel o con calculadora. La estimación tiene en cuenta el error, pero de manera menos precisa. A veces, este no tiene un control asegurado.”

En otras palabras, la aproximación podría ser el resultado de una estimación, pues lo que se busca en una aproximación es un valor numérico muy cercano al valor real, mientras que la estimación es un proceso de tipo mental que no es controlable y subjetivo, pues depende de los conocimientos previos y perspectiva de quien realice dicha estimación.

## **2.6. Aprendizaje de la estimación y la medida, magnitudes y su medida**

**2.6.1. Aprendizaje de la medida y la estimación.** Es importante destacar que la estimación de las medidas de las cantidades y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse éstas medidas trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas (Ministerio de Educación Nacional, 2006)., en términos de la estimación como lo menciona Castillo (2012) “La estimación es un concepto que se ha incorporado recientemente al currículo escolar; desde 1986 en el NCTM publica su

yearbook dedicado a la estimación 'Estimation and mental computation', se han generado numerosos documentos centrados en la enseñanza y aprendizaje” (p.34).

A continuación, se presentan en la tabla 2 las aportaciones de autores en el campo exclusivamente en el aprendizaje de la estimación en medidas, objeto de estudio de esta investigación.

Tabla 2

*Aportaciones de Bright, Hildreth, Castro, Rico y Castro, Callis de los Conceptos de Estimación en Medidas.*

Autor(es)	Aportes de los conceptos de estimación en medidas
<b>Bright (1976)</b>	<p>Se realiza una primera aproximación al concepto de estimación como una parte de la enseñanza de la medida. Bright (1976) define la estimación en medida como el “proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos” (p. 89).</p> <p>La estimación en medida para ser interiorizada firmemente requiere de una serie de ideas y conceptos:</p> <p>“La unidad de medida a usar, El tamaño de la unidad respecto de objetos familiares o de otras unidades de medida para la misma magnitud, otras medidas en esa unidad, un compromiso de mejorar el rendimiento de la estimación de modo que el resultado esté tan cerca de la medida exacta como sea posible” (p. 89).</p> <p>Con respecto a los objetivos de la estimación, Bright (1976) indica que:</p> <p>“los objetivos principales de la inclusión de ejercicios de estimación en el currículo de matemáticas son, en primer lugar, ayudar a los estudiantes a desarrollar un marco mental de referencia para los tamaños de las unidades de medida en relación entre sí y con los objetos reales, y, en segundo lugar, proporcionar a los estudiantes con actividades que ilustran las propiedades básicas de la medición” (p. 93).</p> <p>Para Bright (1976), la estimación es considerada una herramienta para la enseñanza de la medida. También da indicaciones sobre</p>

	<p>cómo debe ser abordada la estimación en la escuela. Dentro de algunas ideas relevantes para el desarrollo de esta investigación se encuentran:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Para desarrollar la habilidad de estimar los estudiantes primero deben hacer una estimación y luego realizar la medición como método de comprobación.</li> <li>-Es conveniente que los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar una idea del tamaño de la unidad antes de hacer estimaciones.</li> <li>- Es importante que las situaciones planteadas a los estudiantes les sean familiares.</li> <li>- Las actividades deben ser secuenciadas de modo que todos los estudiantes puedan mejorar la precisión de sus estimaciones.</li> <li>- La autocomprobación de las estimaciones también ayuda a distinguir el acto de medición del concepto abstracto de medida.</li> <li>- La autocomprobación proporciona un entorno experimental para explicar los errores en medición.</li> <li>- Los ejercicios de estimación ayudan a los estudiantes a desarrollar una apreciación realista de la exactitud de las mediciones físicas.</li> </ul>
<b>Hildreth(1983)</b>	<p>Para este autor la estimación de la longitud involucra varias habilidades y conceptos como:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Una comprensión de los atributos (longitud o área) que se medirá.</li> <li>- La comprensión del concepto de unidad.</li> <li>- Una imagen mental de la unidad que se está utilizando en la tarea de estimación.</li> <li>- La capacidad de comparar los objetos en el atributo a medir.</li> <li>- La capacidad de realizar la iteración de la unidad.</li> <li>- La capacidad de seleccionar y utilizar las estrategias adecuadas para hacer estimaciones.</li> <li>- La capacidad de comprobar la idoneidad de la estimación.</li> </ul>
<b>La aportación de</b>	Estos autores señalan una serie de destrezas previas que

<b>Segovia, Castro, Rico y Castro(1989)</b>	<p>facilitarían la realización de estimaciones razonables en medida, así como de las principales estrategias que se utilizan en los procesos de estimación en medida. Los procesos de estimación están implícitos en todos los componentes de cálculo y de medidas.</p> <p>Las destrezas básicas, de las que conviene disponer para realizar estimaciones razonables en medida son las siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Interiorización de las unidades de medida.</li> <li>- Referente</li> <li>- Técnicas Indirectas</li> </ul>
<b>Callís (2002;2006)</b>	<p>Recoge una serie de directrices para la enseñanza y aprendizaje de la estimación. Para este autor el diseño de actividades y propuestas deben estar muy bien fundamentadas permitiendo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Darle sentido a la estimación métrica en la realidad.</li> <li>- Conocer las medidas tradicionales del propio entorno y su utilidad relacionándolas con el S.I.</li> <li>- Desarrollar capacidades analíticas de composición y descomposición (actividades con formas que permitan descubrir en ella, elementos que actúen o puedan actuar de unidades estructurales o bien conceptuales; trabajar la igualación comparativa tanto la aditiva como la substractiva; medir una magnitud a través de medidas indirectas o de relaciones intermagnitudinales (control de tiempo para la longitud manteniendo velocidad o ritmo, ...); establecer criterios de interrelación y equivalencia métrica entre diferentes unidades y sistemas.</li> </ul>

*Nota:* Aportes de Estimación en Medida (Castillo, 2012, p.p .41-52)

**2.6.2. Aprendizaje de las magnitudes y medida.** En este apartado se analizarán los procesos mediante los cuales el niño adquiere los conceptos de magnitud y medida mediante los aportes de los autores que se mencionan en la tabla 3:

Tabla 3

*Aportaciones de Piaget, Inhelder y Szeminska, Inskip, Chamorro y Callís.*

Autor(es)	Aportes de los conceptos de magnitud y medida
<b>Piaget, Inhelder y Szeminska (1960)</b>	<p>En los aportes de estos autores hacen una descripción de estadios del proceso de medida del niño los cuales son citados por Dickson, Brown y Gibson (1991, pp. 93-96).</p> <p>Estadio en el que comienzan a emerger la conservación y la transitividad.</p> <p>Estadio caracterizado por el inicio de la conservación operacional y la transitividad.</p> <p>Estadio en que se capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto que hay que medir.</p> <p>Etapas final en el desarrollo de las nociones de medida.</p>
<b>Inskip (1976)</b>	<p>Al analizar el proceso de medida este autor encuentra una mezcla de destrezas sensoriales y perceptivas con elementos de geometría y aritmética, destaca al área afectiva y proporciona al niño la oportunidad de alcanzar un sentido de realización.</p> <p>Para el autor este proceso es secuencial desde que compara hasta que utiliza una unidad de medida. Plantea los siguientes componentes implicados en la medición:</p> <p><b>La percepción:</b> La medición comienza con la percepción de lo que debe ser medido.</p> <p><b>La comparación:</b> Al percibir la propiedad de algún objeto, éste se puede comparar.</p> <p><b>Como búsqueda de un referente:</b> Se necesita algún estándar de medida, un referente que pueda ser usado sucesivamente y al que se pueda acudir en cualquier momento.</p> <p><b>Como sistema:</b> Un sistema estandarizado como lo es el S.I.</p> <p><b>Como una actividad afectiva:</b> El trabajo con los niños producirá dos resultados afectivos: (1) los niños apreciarán el papel que la medición juega en sus vidas y en la sociedad, y (2) los niños disfrutarán siendo capaces de medir por sí mismos.</p> <p><b>Como una actividad:</b> Que los niños tengan experiencias en todas las áreas básicas de la medición y que sean capaces de medir precisa y consistentemente.</p>
<b>Chamorro (1988)</b>	<p>Este autor junto con Belmonte (1988) resumen los estadios piagetianos sobre el desarrollo evolutivo de la idea de medida considerando los siguientes aportes:</p> <p><b>Estadio de la comparación perceptiva directa entre dos objetos:</b> se realiza con la mirada sin desplazar objetos.</p>

	<p><b>Estadio caracterizado por el desplazamiento de objetos:</b> se comparan los objetos desplazándolos.</p> <p><b>Estadio en que se hace operativa la propiedad transitiva:</b> es decir, una comparación en donde nota la intervención de un término medio. Para este autor medir es un acto complejo que requiere práctica y soltura puesto que es un proceso de clasificación y seriación, ya que supone la elección de un conjunto de objetos, y de entre todos sus atributos (color, tamaño, masa, longitud, etc.) escoger uno medible. Dentro de las recomendaciones que plantea el autor se encuentran las siguientes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ir de lo concreto a lo abstracto, de lo fácil a lo difícil, según las fases: manipulativa, verbal, gráfica y simbólica.</li> <li>- Seguir una enseñanza no lineal.</li> <li>- Permitir al alumno que descubra y aprenda de sus errores.</li> <li>- Fomentar las discusiones en grupo o colectivas, permitiendo el aprendizaje en diálogo y la confrontación de ideas.</li> <li>- Utilizar la vida como fuente de situaciones problemáticas.</li> </ul> <p>A lo referido a la unidad el proceso de construcción de ésta sigue varias fases:</p> <p><b>Ausencia de unidad.</b> La primera medida es simplemente visual y comparativa entre objetos.</p> <p><b>Unidad objetual.</b> Es una unidad que realiza la función de unidad de medida.</p> <p><b>Unidad situacional</b> Todavía se toma como unidad un objeto, pero este puede cambiar dependiendo de la cantidad a medir.</p> <p><b>Unidad figural</b> Aquí, la unidad a construir va perdiendo toda relación con el objeto a medir.</p> <p><b>Unidad propiamente dicha.</b> La unidad se ve totalmente libre de la figura u objeto considerado, tanto en forma como en tamaño.</p>
<p><b>Callís(2002)</b></p>	<p>Para este autor el dominio de la capacidad de medida necesita de la adquisición del espacio y del número, pero por ella misma, además, tiene, también su propia evolución genética que pasa por la adquisición de tres factores que conjuntamente configuran el dominio de la medida:</p> <p><b>Adquisición de la magnitud</b> que a su vez está formado por las siguientes etapas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>Identificación y discriminación magnitudinal.</i></li> <li><i>Conservación de la magnitud.</i></li> <li><i>Ordenación de magnitud.</i></li> <li><i>Relación magnitud número</i></li> </ul> <p><b>Adquisición de la medida.</b> El autor escoge los siguientes estadios piagetianos para la adquisición de la Medida:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>Estadio de comparación perceptual.</i></li> <li><i>Estadio de comparación objetual.</i></li> <li><i>Estadio de la transitividad operativa.</i></li> </ul>

	<p style="text-align: center;"><b>Adquisición de la unidad.</b></p> <p>La interiorización del concepto de unidad y la capacidad de uso de la unidad como elemento de comparación objetiva, considerando las siguientes etapas:</p> <p style="text-align: center;"><i>Etapas de ausencia unitaria</i>  <i>Unidad dependiente</i>  <i>Unidad independiente y sistémica</i></p>
--	--

*Nota:* Aportes de Magnitud y Medida. (Castillo, 2012, p.p.34-40)

## 2.7.Fotografía

En este apartado se hará una breve descripción de las características de la fotografía, siendo la propuesta didáctica para el aprendizaje del objeto de estudio de dicha investigación. Es importante mencionar que en el desarrollo de ésta y en la búsqueda de los antecedentes no se encontraron investigaciones que relacionaran un objeto matemático con la fotografía. Ahora bien, enfocándose al concepto, Munárriz (1999) refiere que dentro de su característica más notable, se trata de un tipo de objetos que guardan representaciones de nuestro mundo visual, al mirar fotografías se ven escenas que no están realmente ante nuestros ojos, pero que han quedado atrapadas en ese objeto<sup>7</sup>, lo cual permite una recreación del momento perceptivo. La fotografía es ante todo una representación del mundo visual (Munárriz, 1999).

La fotografía se destaca por su especificidad. Las imágenes fotográficas tienen un carácter radicalmente distinto al resto de las representaciones visuales de la realidad, la fotografía aparece como una representación fiel y precisa, una representación perfecta.

Munárriz (1999) afirma:

Son imágenes que reproducen la realidad exactamente tal y como es. Las fotografías parecen haber congelado un instante de nuestra visión, almacenándolo para que podamos disfrutar de

---

<sup>7</sup> “Lo que se percibe con alguno de los sentidos, o acerca de lo cual se ejercen.” Diccionario Enciclopédico. Ed. Espasa calpe. Barcelona, 1974. Tomo 15, p. 1102.



una experiencia diferida, repitiendo ese momento de observación. La fotografía es un sistema de representación muy especial, que representa la realidad mediante un proceso específico, muy distinto a otros sistemas como la pintura, el grabado o el dibujo. (p.120)

Es pertinente recalcar que la fotografía se asume en la investigación como categoría debido a que se conceptualiza y se define, mostrando la manera como se va usar y ya como herramienta cuando se utiliza en las diferentes situaciones de la secuencia. Para esta investigación se utilizará el concepto de *fotografía matemática*.

### **3. Diseño Metodológico**

#### **3.1. Enfoque de investigación**

El modelo de investigación que se tuvo cuenta en el desarrollo del proyecto fue el *crítico-social*, pues a partir de una situación social se buscó mejorar la calidad de la acción dentro de la misma (Elliot, 1993), en el caso particular la situación social fue la capacidad estimativa de los estudiantes de grado décimo del Colegio el Tesoro de la Cumbre (I.E.D), específicamente en las medidas de longitud y la acción fueron las tareas cuidadosamente secuenciadas (basadas en la fotografía) que bajo la guía del docente investigador, pretendieron indagar acerca de cómo los estudiantes construyeron los significados o conocimientos relativos a este objeto de estudio y cómo superaron los errores y dificultades que les surgieron.

#### **3.2. Tipo de investigación**

El tipo de investigación que se desarrolló para este trabajo fue la Investigación Acción. Con la investigación acción se obtiene información a través de metas trazadas por parte del docente investigador, permitiendo hacer una práctica reflexiva de los cambios positivos alcanzados en el ambiente escolar y analizando los resultados del mejoramiento de los estudiantes y su propia vida (Geoffrey y Mills, 2011).

Los aspectos que caracterizaron esta investigación permitieron establecer un puente entre la reflexión didáctica y epistemológica asociada a la estimación de medidas de longitud, el diagnóstico permitió identificar un problema, en donde el docente investigador y los estudiantes fueron agentes que participaron constantemente en la misma. El trabajo se modificó continuamente a partir de los resultados obtenidos en cada uno de los momentos en búsqueda de una mejora, la reflexión sobre el trabajo de aula se realizó sobre elementos concretos (las situaciones), al iniciar el trabajo se previeron unos posibles intervalos de tiempo susceptibles de modificar de acuerdo a los resultados obtenidos en el transcurso del mismo, a medida que se avanzó en el desarrollo de trabajo hubo un enriquecimiento teórico tanto en estudiantes como en el docente investigador.

Estos aspectos consolidaron momentos de constante retroalimentación, que exigieron la interpretación de lo que ocurre a la luz de una teoría, además requirieron una postura crítica frente a la acción en el aula y a las propuestas de enseñanza. La retroalimentación se realizó periódicamente de forma presencial y virtual con el Asesor. En este sentido la formación didáctica de la estimación de medidas de longitud se consolidó cuando se tuvieron referentes teóricos y de forma paralela con tareas diseñadas por el investigador para comprenderlo y articularlo en el aula. Por lo anterior la investigación-acción se convierte en la estrategia investigativa apropiada para lograr el objetivo del trabajo.

La investigación se realizó a través de cuatro momentos, identificación y planteamiento del problema, recolección de información, análisis e interpretación de la información y análisis de resultados y reflexión final (Geoffrey y Mills, 2011).

### **3.3.Población y muestra de la investigación**

El trabajo de campo se realizó con estudiantes de grado décimo de educación básica secundaria, del Colegio El Tesoro de la Cumbre (I.E.D), de la jornada mañana, ésta institución es oficial, está ubicada en la localidad de Ciudad Bolívar, barrio el Tesoro y atiende población estudiantil de estrato 1. El trabajo de aula se desarrolló durante 4 semanas con una intensidad de 2 horas semanales, durante el segundo semestre del año 2017 con un total de 8 estudiantes, 6 del grado 1002 y 2 del grado 1001, la selección de los estudiantes fue sujeta a criterio (estudiantes con más bajo rendimiento en la prueba diagnóstica), los cuales se designarán con siglas desde *E1* hasta *E8* asignadas aleatoriamente.

Es pertinente mencionar que los estudiantes del grado 1002 no tuvieron docente de matemáticas por más de cuatro meses finalizando el segundo semestre de 2015 e iniciando el primer semestre de 2016, lo cual se evidenció en los resultados de la prueba diagnóstica.

**3.3.1. Participación de la muestra.** El grupo de 8 estudiantes no fue estable a lo largo del segundo semestre de 2017, ni durante el periodo en que transcurrió la recogida de datos, debido a que uno de los estudiantes se retiró de la institución.

En concreto, se presentó la siguiente circunstancia:

*E2* sólo presentó la prueba diagnóstica y la guía 1 de la categoría de Magnitud y Medida (**MM**), no participó en ninguna de las siguientes sesiones.

### **3.4.Categorías de análisis**

**3.4.1. Categorías de Análisis.** En virtud de los objetivos propuestos en la presente investigación se establecen las categorías que se formularon para abordar el objeto de estudio, con su respectiva codificación los cuales se utilizarán en el desarrollo de los capítulos siguientes.

**3.4.1.1 Magnitud y medida (MM).** Las dos subcategorías **de** (MM) **son:**

**a) (MM.1) Unidad de Medida**

*Descriptores de (MM.1)*

**(MM.1.1)** Utiliza correctamente una unidad de medida (dedo índice) como referente en una fotografía para calcular longitudes de objetos de su entorno.

**(MM.1.2)** Identifica objetos de su entorno que se aproximan a su unidad de medida (dedo Índice).

**(MM.1.3)** Compara con la unidad de medida (dedo índice) diferentes longitudes de su cuerpo.

**(MM.1.4)** Realiza conversiones entre la unidad de medida (dedo índice) y las diferentes longitudes corporales (longitud del brazo, la longitud del pie, estatura, longitud de la cintura a los pies).

**(MM.1.5)** Asocia un referente de medida pertinente a longitudes de objetos de su entorno.

**b) (MM.2) Clasificación de las Magnitudes**

*Descriptores de (MM.2)*

**(MM. 2.1)** Utiliza instrumentos de medición (metro y regla graduada en centímetros) de longitudes corporales (longitud del brazo, la longitud del pie, estatura, longitud de la cintura a los pies).

**(MM .2.2)** Reconoce la importancia del sistema métrico internacional (S.I).

**(MM. 2.3)** Utiliza múltiplos y submúltiplos del metro para estimar longitudes de su contexto.

**(MM .2.4)** Resuelve situaciones problema que involucran múltiplos y submúltiplos del metro.

**(MM. 2.5)** Relaciona longitudes de objetos con unidades del S.I.

**(MM.2.6)** Realiza conversiones de múltiplos a submúltiplos y de submúltiplos a múltiplos.

**3.4.1.2 Estimación.** Las dos subcategorías de (MM) son:

**a) (ES.1)** Estimación en Medidas

*Descriptores de (ES.1)*

**(ES. 1.1)** Realiza estimaciones de longitudes de objetos que se encuentran en fotografías de su contexto (colegio) utilizando referentes que están en centímetros.

**(ES. 1.2)** Visualiza la unidad que se va a usar para realizar la estimación y la repite mentalmente sobre el objeto a medir en las diferentes fotografías.

**(ES.1.3)** Estima longitudes de su contexto, utilizando la unidad de medida del S.I que considere más adecuada.

**b) (ES.2) Estimación y Aproximación**

**(ES. 2.1)** Que los estudiantes estimen y aproximen longitudes de objetos los cuales tenga la misma o se acerque a la longitud de los referentes que se han utilizado (la longitud del brazo, longitud de su cintura hasta los pies, su estatura, la longitud de su pie y la longitud del dedo índice).

**(ES. 2.2)** Identifica longitudes de objetos que se encuentran en su entorno, que tengan la misma longitud o se aproximen a un referente de medida.

**3.4.1.3 Fotografía.** La subcategoría de (F) es:

**a) (F.1) Fotografía Matemática**

*Descriptor de (F)*

**(F. 1.1)** Compara en un grupo de fotografías tomadas desde diferentes distancias la longitud de un mismo objeto.

**(F. 1.2)** Realiza estimaciones de longitudes de objetos en una fotografía panorámica de un contexto diferente al colegio, pero conocido para el estudiante.

**(F .1.3)** Estima longitudes de objetos conocidos en fotografías tomadas fuera de su contexto.

**3.4.2. Matriz categorial.** En la tabla 4 se presenta la matriz categorial codificada según el apartado anterior (categoría, subcategoría y descriptores), también se presentan los indicadores, interrogantes, instrumentos y la fuente, herramienta importante que se utilizó para la interpretación y triangulación de la información recogida.

Tabla 4  
Matriz Categorical Codificada

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍAS	DESCRIPTORES	INDICADORES	INTERROGANTES	INSTRUMENTO	FUENTE
(MM)	(MM.1)	(MM.1.1)	Cuál es el saber que tienen los estudiantes acerca de la unidad.	¿Ha utilizado una unidad de medida en su vida diaria?	Guía 1 "Medidas de Longitud"	Estudiantes
		(MM.1.2)				
		(MM.1.3)	Cuál es el saber de los estudiantes acerca de una magnitud continua y discreta.			
		(MM.1.4).	Cuáles son las principales medidas de longitud que conocen los estudiantes y cuales utilizan en su vida diaria.			
		(MM.1.5).		¿Cómo aborda dicho concepto en sus clases de matemáticas?		
	(MM.2)	(MM. 2.1)	Cuál es el saber de los estudiantes de los instrumentos de medición y las unidades de medida utilizadas en diferentes contextos	¿Cuáles son las herramientas que usted utiliza para medir?		
		(MM .2.2)				



		(MM. 2.3)	Cuál es el saber de los estudiantes de los conceptos de múltiplos y submúltiplos del metro.		Guía 2"medidas de longitud, Aplica lo aprendido"	
		(MM .2.4)	Cuál es el saber de los estudiantes al resolver situaciones problemáticas de longitud.			
		(MM. 2.5)	Cómo el estudiante conoce y utiliza la medida y se interesa por expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades utilizadas.			
		(MM.2.6)				
(ES)	(ES.1)	(ES. 1.1)	Cuál es el saber de los estudiantes acerca de la estimación.	¿Qué objetos que se encuentren en el salón miden menos de un metro?	Guía 3"Estimación y medidas de longitud"	Estudiantes
		(ES. 1.2)		¿Cuál podrá ser la longitud del largo del tablero?		
		(ES.1.3)	Cómo el estudiante se interesa por utilizar la estimación como una herramienta para asignar valores los cuales no tienen que ser exactos, pero sí adecuado para tomar decisiones.	¿Cuántas personas hay en el parque las cuales se ven a través de la ventana?		

	<b>(ES.2)</b>	<b>(ES. 2.1)</b>	Cuál es el saber de los profesores y estudiantes cuando se utiliza el concepto de aproximación y estimación	¿Entre aproximación y estimación cuál concepto utilizas en la vida diaria con más frecuencia?		
		<b>(ES. 2.2)</b>				
<b>(F)</b>	<b>(F.1)</b>	<b>(F. 1.1)</b>	Cuál es el saber del estudiante acerca del tipo de magnitud que está estimando en la fotografía con la medida correspondiente.	¿Qué relación crees que tiene la estimación con la fotografía?	Guía 4 " Fotografía"	Estudiantes
		<b>(F. 1.2)</b>				
		<b>(F .1.3)</b>				

### 3.5. Instrumentos y recolección de información

**3.5.1. Instrumentos.** Los instrumentos utilizados en la investigación fueron los siguientes:

- **Prueba Diagnóstico** (*ver Anexo 1*): Se aplicó aleatoriamente la prueba teniendo en cuenta el problema de investigación planteado en el *apartado 1.1* a un grupo de estudiantes de grado décimo del Colegio El Tesoro de la Cumbre (I.E.D), de la jornada mañana.
- **Secuencia didáctica:** Se aplicó sujeta a criterio (a los estudiantes con más bajo rendimiento en la prueba diagnóstica). En la secuencia didáctica se plantearon tres situaciones didácticas que apuntaban a cada categoría. La situación 1 (**MM**) (*ver Anexo 2*) está conformada de 2 guías, cada una con ocho actividades; la situación 2 (**ES**) (*ver Anexo 3*) está conformada de una guía de 4 actividades y finalmente la tercera situación (**F**) (*ver Anexo 4*) está conformada de una guía que contiene 3 actividades.

**3.5.2. Recolección de información.** Como instrumentos de recolección de información se tuvo en cuenta los siguientes: apuntes y observaciones de los estudiantes en cada una de las situaciones, trabajos realizados en clase, diarios de campo, la triangulación de la información obtenida a través de los indicadores de cada una de las categorías y las estrategias y herramientas utilizadas para las diferentes mediciones de longitud.

Para el análisis se tendrá en cuenta la triangulación de la información obtenida a través de los indicadores de la categoría propuesta, los registros individuales de los estudiantes (talleres) y el diario de campo.

### **3.6.Validez**

El Director validó los instrumentos una vez fueron revisados por dos Docentes: El primero, Magister en Ciencias Exactas (Universidad Nacional) y Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas (Universidad Distrital), el segundo, Magister en Docencia de la Matemática (Universidad Pedagógica Nacional) y Licenciada en Matemáticas (Universidad Pedagógica Nacional), en donde dieron sus observaciones y la pertinencia del instrumento a aplicar. (Ver Anexo 5).

### **3.7.Consideraciones éticas**

La información y los instrumentos de recolección de datos que se obtuvieron y se aplicaron por medio de la ejecución del plan de acción que se estableció en la metodología de investigación acción, tuvo como fuente los estudiantes de grado décimo (jornada mañana) del Colegio el Tesoro de la Cumbre (I.E.D).

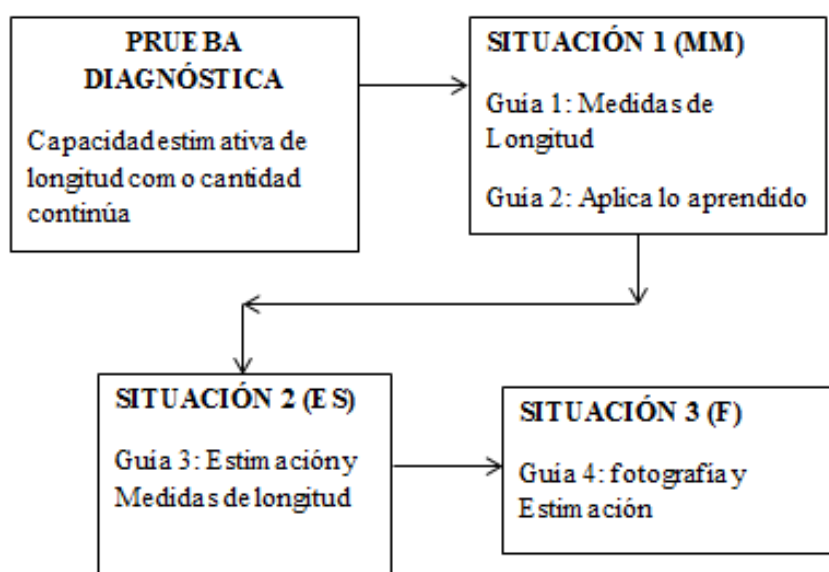
No obstante, se indica que el material de indagación que se recolectó será utilizado con fines netamente académicos e investigativos, previa autorización de la Institución Educativa y de los padres de familia de los estudiantes de grado décimo, por lo que se requirió de su consentimiento.

Así mismo, se precisa que, de conformidad con las consideraciones éticas del proceso de investigación educativa, esta indagación no representará un riesgo a la seguridad emocional y física de los estudiantes, por lo que se hará un uso apropiado a la información recolectada y presentada.

### **3.8.Diseño de la intervención**

En la *figura 2* se muestra el orden en que se diseñó cada una de las situaciones didácticas que apuntaban a cada categoría (**MM, ES y F**) de la

secuencia didáctica teniendo en cuenta que, para el desarrollo de ésta, se analizó los resultados arrojados en la prueba diagnóstica. En todas las situaciones se pretendió que el estudiante estimara una medida longitud a partir de una fotografía de su contexto y fuera de él a través de instrucciones dadas en cada situación. Para cada situación se tuvo en cuenta tres aspectos: intenciones didácticas, aprendizajes esperados y los conocimientos previos de los estudiantes.



**Figura 2.** Elaboración propia en donde se presenta el diseño y secuencia de la intervención.

### 3.9. Objetivos de la intervención

En la *tabla 5* se presentarán los objetivos de cada una de las situaciones que conforman la secuencia didáctica, los cuales están dirigidos hacia los aprendizajes esperados por los estudiantes respecto al objeto de estudio, siendo de tipo: procedimentales, conceptuales y actitudinales.

Tabla 5  
Objetivos de la Secuencia Didáctica

Situación	Objetivos de Tipo		
	Procedimental	Conceptual	Actitudinal
(MM)	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Resolver situaciones problemática de longitud.</li> <li>-Utilizar unidades de medida convencionales en contextos reales.</li> <li>-Elaborar y utilizar estrategias personales para medir.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Retroalimentar los conceptos de divisores y múltiplos del metro.</li> <li>-Realizar mediciones usando instrumentos y unidades de medida en contextos cotidiano.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Elección de la unidad más adecuada para la expresión de una medida.</li> <li>-Interesarse por conocer y utilizar la medida, por expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades utilizadas.</li> </ul>
(ES)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estimar medidas de longitud en objetos de la vida cotidiana.</li> <li>- Estimar medidas de longitud objetos que se encuentren en diferentes fotografías teniendo como referencia una unidad de medida adecuada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Comparar y ordenar unidades y cantidades de una misma magnitud.</li> <li>-Explicar oralmente y por escrito el proceso seguido y la estrategia utilizada en la medición y estimación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Interesarse por utilizar la estimación en medidas de longitud tomando como referencia los múltiplos y submúltiplos del metro.</li> </ul>
(F)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estimar medidas de longitud en objetos que se encuentren en fotografías que contienen su contexto.</li> <li>- Estimar medidas de longitud objetos que se encuentren en diferentes fotografías a partir de conocimientos y experiencias con los cuales cuente el estudiante.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Diferenciar entre los conceptos de magnitud y medida.</li> <li>-Comprender el tipo de magnitud que se está estimando en la fotografía con la medida correspondiente.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Interesarse por utilizar la estimación como una herramienta para asignar valores los cuales no tienen que ser exactos pero sí adecuado para tomar decisiones.</li> </ul>

### 3.10. Metodología de la intervención y enfoque pedagógico

Como se mencionó en el *apartado 3.2* el tipo de investigación es investigación-acción, esta investigación desarrolla una metodología bajo un enfoque cualitativo y señala la manera como se aborda el objeto de estudio, las intencionalidades o propósitos, el accionar de los estudiantes involucrados en la investigación, los diversos procedimientos que se desarrolla y los logros que se alcanzaron (Pérez ,1998). A partir de lo mencionado anteriormente los pasos para el acercamiento con la metodología investigación-acción se

inició con el diagnóstico<sup>8</sup>; luego, la construcción de la secuencia didáctica, la puesta en práctica de ésta y su respectiva observación, y la reflexión e interpretación de los resultados.

### **3.11. Fases de la intervención**

Las fases que organizaron el ejercicio de esta investigación acción se estructuraron de la siguiente manera:

- Fase 1 –*Trabajo Previo*

La primera fase correspondió al trabajo previo que involucró la recolección de la información sobre el objeto de estudio, el diagnóstico, la motivación, el reconocimiento de las ideas previas de los estudiantes y la conformación de grupos de trabajo.

- Fase 2-*Planificación*

Se focalizó y se delimitó la recogida de datos, haciendo una reducción de los mismos. Reducir la información significó hacerla manejable y para ello, se codificó y categorizó. A través de esto se buscó describir qué estrategias emplearon los estudiantes en la realización de tareas de estimación, propuestos en la secuencia didáctica.

- Fase 3 -*Realización*

Se organizó la información mediante una matriz categorial, se analizó y se trianguló la información recolectada.

- Fase 4- *Aplicación e Interpretación de la información*

En esta fase se dio sentido a las categorías, estableciendo una relación con el marco teórico, dando significado y validez a la pregunta formulada en la investigación. Con la

---

<sup>8</sup> Desde una perspectiva constructivista el diagnóstico no sólo debe describir la realidad, sino que además debe brindar explicaciones para poder comprenderla.

puesta en práctica de los resultados obtenidos en la fase anterior terminó el proceso de análisis de la información. El paso siguiente fue mostrar las conclusiones y recomendaciones.

#### **4. Análisis y Resultados**

En este apartado se presenta el análisis y los resultados de los procedimientos empleados por los estudiantes en la resolución de las tareas de estimación, identificando el grado de comprensión, en relación con la estimación de medidas de longitud y su trascendencia en el ámbito educativo a partir de la fotografía como propuesta didáctica de aprendizaje, teniendo en cuenta algunas categorías expuestas por Rico, Cañadas, Gutiérrez, Molina y Segovia(2013) las cuales permiten hacer estimaciones razonables de medida : Dominio de estrategias de comparación (**DEC**), inteorización de referentes (cantidades familiares cuya medida es conocida)(**IR**) y la inteorización del tamaño de las unidades de medida (**IU**). Este análisis permite dar respuesta a la manera de cómo incide el uso de la fotografía como propuesta didáctica.

##### **4.1.Prueba diagnóstica**

###### **4.1.1. Análisis y resultados.**

Esta sesión se desarrolló sin incidentes significativos. Se dispuso que los estudiantes se sentaran separados para evitar que se copiaran entre ellos, se les repartió el test diagnóstico, y se les dieron las siguientes directrices:

- ✓ Sólo se les permitía utilizar lápiz o bolígrafo para la realización de la prueba.



- ✓ No podían hablar. Si algún estudiante tenía alguna duda debía levantar la mano y esperar a que llegara a su pupitre el profesor.
- ✓ Se les pidió que escribieran con letra clara y legible.
- ✓ Se les insistió que en las tareas se les pedía respuestas aproximadas y no que trataran de adivinar la medida exacta.
- ✓ No se les permitió utilizar instrumentos de medida.
- ✓ Se insistió en la importancia de explicar lo mejor posible (con letras, fórmulas, cuentas, etc.) todos los razonamientos, procesos, e ideas que les habían llevado a los diferentes resultados.
- ✓ Se les recordó que debían indicar la unidad de medida utilizada en cada caso.
- ✓ Se les advirtió de que tenían 50 minutos para hacer la prueba.


Además de estas directrices, se les indicó cuáles eran cada uno de los objetos sobre los que debían realizar algún tipo de estimación. Durante la realización de la prueba hubo que insistir en que se trataba de dar estimaciones y no era necesario dar el valor exacto, pues muchos estudiantes afirmaban que no contestaban las preguntas porque “no sabían cuánto medían los objetos”.

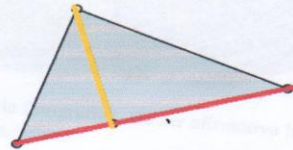

En la tabla 6 se relacionan los aspectos puntuales que pretende caracterizar el diagnóstico, además de agrupar la pregunta con los tres aspectos mencionados anteriormente.


Tabla 6

Caracterización del Diagnóstico

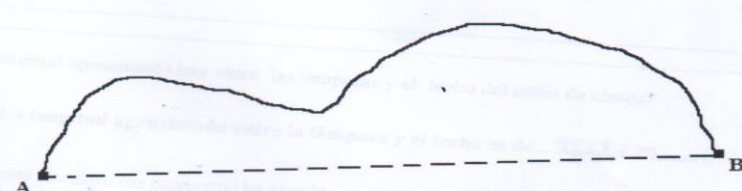
Pregunta	Categoría	Categorías			Aspecto observado	% de respuestas	Modelo de respuesta
		DEC	IR	IU			
1	ES	X		X	$1\frac{1}{2}m$	75%	<p>1 ¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?</p> <p><b>Solución:</b> La mesa del profesor mide <u>un metro y medio</u> de largo</p> <p>Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución:</p> <p>Pues llegué a la conclusión de que del inicio de mi mano hasta el hombro es un metro y calculando es un poco más largo que esto por esto sería un metro (medio)</p>
2	MM	X		X	<p>Las respuestas variaron entre estos intervalos de cada longitud.</p> <p>L: 5 – 6 cm;</p> <p>A: 2 – 3cm</p>	50%	<p>2. Mida el “largo” y el “ancho” del siguiente rectángulo y escriba cuánto miden. (Utilizar la unidad de medida que considere más adecuada).</p> <div data-bbox="1303 986 1702 1110" data-label="Image"> </div> <p>Largo: <u>6 cm</u></p> <p>Ancho: <u>2 cm</u></p> <p>por la medida de mis dedos que miden aproximadamente 1cm</p>

3	F	X	X		Dificultades en objetos cuya longitud es mayor a su estatura.	50%	<p>3. Observe la siguiente fotografía, e identifique un objeto que esté en la fotografía de la cual usted tenga una aproximación de su longitud.</p>  <p>¿Conoce el sitio en el cual está tomada la fotografía? De ser afirmativa la respuesta escriba el nombre del lugar <u>Parque la Joya</u></p> <p>¿Qué objeto identificó? <u>Poste de energía</u></p> <p>¿Cuál es su longitud? <u>6 metros de alto</u></p> <p>¿Qué experiencia tuvo para determinar la longitud de dicho objeto?</p> <p><u>Observar la pared del salón y multiplicarla por 2</u></p>
4	ES	X	X		Con el pie de página, los estudiantes interiorizaron la medida y la relacionaron con la longitud de un objeto del salón de manera asertiva.	100%	<p>4. Mencionar tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 decímetro<sup>1</sup> (dm).</p> <p><b>Objetos que miden aproximadamente. 1 dm:</b></p> <p>Objeto 1 <u>Un espero - largo</u></p> <p>Objeto 2 <u>Un celular - largo</u></p> <p>Objeto 3 <u>Interruptor - largo</u></p>

5	MM	X		X		37,5%	<p>5. Mida en el siguiente triángulo la base (segmento de color rojo) y la altura (segmento de color amarillo) del mismo. (Utilizar la unidad de medida que consideres más adecuada).</p>  <p>Longitud de la Base: <u>6 cm</u>.....</p> <p>Longitud de la Altura: <u>3 cm</u>.....</p>
6	F	X	X		A pesar de que la foto era del contexto de los estudiantes se presentó dificultad en la unidad de medida.	37,5%	<p>6. Observe la siguiente fotografía y a partir del objeto referenciado en el punto 3, utilícelo para estimar la longitud del objeto que se encuentra encerrado de rojo.</p>  <p>¿Conoce el sitio en el cual está tomada la fotografía?. De ser afirmativa la respuesta escriba el nombre del lugar <u>Colegio</u></p> <p>La longitud del objeto encerrado respecto a mi objeto de referencia es <u>8 metros</u></p> <p>Hay objetos dentro de la fotografía que tienen la misma longitud del objeto encerrado, si los hay enciérrelos de un color diferente <u>más postes 15</u></p>
7	ES	X	X		Al realizar la comparación con un referente (dedo índice), la longitud del	0 %	

					referente estaba mal estimada (un dedo índice estaba interiorizado como 1cm)		
8	MM	X		X	La comparación que hicieron los estudiantes fue considerar la longitud de la circunferencia como dos veces el radio.	0 %	
9	F	X	X		Al presentarse una fotografía que no era del contexto de los estudiantes, no tenían claro que referente podrían utilizar para encontrar la longitud solicitada.	37,5 %	<p>9. A partir del objeto referenciado en el punto 3 utilícelo para estimar la altura de la casa que se encuentra delineada de color rojo.</p>  <p>¿Conoce el sitio en el cual está tomada la fotografía?. De ser afirmativa la respuesta escriba el nombre del lugar <u>No lo conozco</u></p> <p>La altura de la casa respecto a mi objeto de referencia es <u>Una casa de dos pisos, no es igual aun poste por lo tal la medida es de 4 metros</u></p> <p>Hay objetos dentro de la fotografía que tienen la misma longitud del objeto encerrado, si los hay enciérrelos de un color diferente</p>



10	ES	X	X		Cuando los objetos a estimar eran múltiplos del metro o incluso el metro se presentaba dificultad al tener un objeto de referencia.	25 %	<p>10. Mencionar tres objetos u elementos que se encuentren dentro del salón con una longitud aproximada de 1 metro (m).</p> <p><b>Objetos que miden aprox. 1 m:</b></p> <p>lo largo de una ventana lo largo de una mesa de estudiante lo largo de una mesa del profesor</p>
11	MM	X	X		No se evidenció ninguna estrategia de la comparación de la trayectoria y la distancia de AB.	12,5 %	<p>11. En el siguiente dibujo aparece en línea continua la "trayectoria" que ha seguido una hormiga para ir del punto A al punto B. Mide la trayectoria de la hormiga y la distancia entre los puntos A y B, y compáralas.</p>  <p>La trayectoria mide: 16 cm La distancia entre A y B es: 10 cm Comparación: Mide diferente por que son una línea y otra y la otra son curvas</p>
12	ES	X	X		Como los estudiantes utilizaron como referentes partes de su cuerpo para estimar medidas, fue el punto de partida de la secuencia.	50 %	<p>12. ¿Cuánto mide aproximadamente (de ancho) el bibliobanco del salón de clases?</p> <p><b>Solución: El bibliobanco mide...1 metro...1 medio... de ancho</b></p> <p>Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución:</p> <p>por medio de el brazo de el dedo asra el dedo indice</p>

13	ES	X	X			50 %	<p>13.¿Qué longitud aproximada hay entre las lámparas y el techo del salón de clases?</p> <p><b>Solución:</b> La longitud aproximada entre la lámpara y el techo es de...<i>1 metro</i>.....</p> <p>Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución:</p> <p><i>Por medio de el brazo y calculando aproximadamente mirando la longitud del brazo y la lámpara al techo</i></p>
----	----	---	---	--	--	------	---

En la *tabla 6* se sistematizó la información obtenida tanto de los diarios de campo, como de los registros individuales de los estudiantes. El análisis de la información obtenida en el Diagnóstico, permitió inferir que el 12, 5% de los estudiantes tenían claridad de la categoría (MM) en la categoría (ES) el 37, 5% y en la categoría (F) sólo el 25%.

**4.1.2. Discusión.** Se evidencia que en las respuestas dadas a las diferentes preguntas como lo plantea Inskeep (1976) para la categoría MM, Bright (1976) para la categoría ES y Munárriz (1999) para la categoría F se considera que un estudiante realiza una estimación en medida razonable cuando:

#### Categoría MM (**Magnitud y Medida**)

Para Inskeep (1976), lo propuesto en la prueba diagnóstico y las respuestas dadas por los estudiantes, se contrastaron con los componentes implicados en la medición; siendo los siguientes:

La medición comienza con la *percepción* de lo que debe ser medido, al percibir la propiedad de algún objeto, éste se puede *comparar*, necesitando un *referente* que pueda ser usado sucesivamente en cualquier momento utilizando un *sistema* estandarizado como lo es el S.I. Frente a estos componentes los resultados obtenidos en los ítems 2, 5, 8, 11, solo el 12,5% de los estudiantes reconocieron las componentes de percepción y comparación con claridad; sin embargo, en la búsqueda de un referente, hubo dificultad ya que no se tenía claridad en un sistema estandarizado.



### Categoría **ES (Estimación)**

Para Bright (1976), lo propuesto en la prueba diagnóstico y las respuestas dadas por los estudiantes, se contrastaron con las indicaciones de la forma como se aborda la estimación.

Al realizar una estimación los estudiantes deben realizar una medición como método de comprobación, es conveniente que los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar una idea del tamaño de la unidad antes de realizar la estimación, la situación planteada debe ser familiar para el estudiante. Frente a estas indicaciones los resultados obtenidos en los ítems 1, 4, 7, 10,12, 13 solo el 37,5% de los estudiantes desarrollaron una idea del tamaño de la unidad, esta unidad fue una parte de su cuerpo (ejemplo: la longitud el dedo índice, la longitud del brazo), las diferentes situaciones de la prueba diagnóstica eran de su contexto, sin embargo no utilizaron ningún método para la comprobación de las diferentes estimaciones y a pesar de tener una idea de tamaño de unidad, la medida de esa unidad era errónea.

### Categoría **F (Fotografía)**

Para Munárriz (1999), lo propuesto en la prueba diagnóstico y las respuestas dadas por los estudiantes, se contrastaron con la forma en que el estudiante percibía una fotografía y que tanto reproducía su realidad para que de esta manera facilitara la realización de estimaciones razonables en medida generando estrategias adecuadas para realizarlas. Frente a estas contrastaciones los resultados obtenidos en los ítems 3, 6, 9 solo el 25% de los estudiantes reconocieron las fotografías presentadas en la prueba diagnóstica y los objetos que se presentaron en las mismas, sin embargo, hubo dificultad en estimar la longitud de un mismo objeto que se encontraba en una fotografía a diferentes distancias, por ejemplo, postes de luz.

## 4.2. Fases de Intervención

Frente a los resultados obtenidos y las dificultades percibidas se propuso una secuencia didáctica con cuatro guías secuenciadas por cada categoría de modo que todos los estudiantes fueran capaces de estimar consistentemente mediante la fotografía.

**4.2.1. Análisis y Resultados.** Para el análisis se tuvo en cuenta la triangulación de la información obtenida a través de los indicadores de cada una de las categorías propuestas, los registros individuales de los estudiantes (guías) y el diario de campo.

Se analizaron los resultados obtenidos en las tres situaciones, teniendo como referencia los indicadores propuestos por cada categoría (*véase apartado 3.4*) y las categorías expuestas por Rico, Cañadas, Gutiérrez, Molina y Segovia (2013). (*Véase capítulo 4*). Cada situación contenía una categoría, siendo el siguiente orden: situación 1 **MM**, situación 2 **ES** y situación 3 **F**. En cada situación se tuvo como eje la fotografía (teniendo en cuenta que ésta es la propuesta de aprendizaje del objeto estudio), existiendo siempre una relación entre la categoría **F** y **MM**; **F** y **ES**.

**4.2.1.1 Guía 1-guía 2: medidas de longitud.** En la tabla 7 se presentarán los resultados de la situación 1 la cual está compuesta por dos guías. En la Tabla 8 se presentarán los aciertos y dificultades generales presentados por los estudiantes en el desarrollo de la situación 1.

Tabla 7

*Caracterización de la Guía 1 y Guía 2 de la Secuencia Didáctica*

CATEGORÍAS		DESCRIPTORES	ITEM		RESULTADOS
POR EL INVESTIGAD OR	REFERENTE (Véase capítulo 4)		GUÍA 1	GUÍA 2	
MM	IU	MM.1.1	1		El 87,5 % de los estudiantes utilizaron correctamente una unidad de medida, que en el caso particular fue la longitud de su dedo índice. (El único referente que se tenía). Pase mi dedo índice en todas las partes indicadas a seguir y después marque cada dedo en la superficie con una línea horizontal para medir cuantos índices ocupa el objeto requerido a medir "E1"
	IR	MM.1.2	2		El 100 % de los estudiantes identificaron objetos de su entorno que tenían la misma longitud de su referente (dedo índice).
	IR	MM.1.3	3		El 100% de los estudiantes compararon su referente con diferentes longitudes de las partes de su cuerpo. Los estudiantes tomaron un referente de medida como bibliobanco o la puerta, marcando su estatura para después utilizar su unidad de medida (dedo índice)

	<b>DEC</b>	<b>MM.1.4</b>	4		El 87,5 % de los estudiantes realizaron entre la unidad de medida (dedo índice) y las diferentes longitudes corporales (longitud del brazo, la longitud del pie, estatura, longitud de la cintura a los pies). Se presentó dificultad cuando se pasó de una unidad de medida pequeña a una unidad de medida grande
	<b>IU</b>	<b>MM.1.5</b>	5		El 100% de los estudiantes asociaron un referente de medida adecuado, cuando se les solicitaba que lo asociaran con la longitud de un objeto que se encontrara en su entorno.
	<b>DEC</b>	<b>MM. 2.1</b>	6		El 100 % de los estudiantes utilizaron correctamente instrumentos de medición (metro y regla graduada en centímetros) para tomar una medida de los referentes que habían trabajado hasta el momento.
	<b>IU</b>	<b>MM .2.2</b>	7-8	1-2-3-4-5-6-7-8	El 75% de los estudiantes vieron la necesidad y la importancia de utilizar una unidad estandarizada (S.I).
	<b>IR</b>	<b>MM. 2.3</b>	7-8		El 50 % de los estudiantes utilizaron múltiplos y submúltiplos del metro para estimar longitudes de su contexto. Se presentó dificultad cuando en la longitud a estimar se utilizó un múltiplo del metro , para los estudiantes era difícil visualizar un objeto cuya longitud fuera mayor a 1 Dm.
	<b>DEC</b>	<b>MM .2.4</b>		1-3-7-8	Como se mencionó en el apartado 3.3.1 un estudiante no presentó más actividades, es decir que los porcentajes a partir de este descriptor de realizaron con 7 estudiantes. El 71,4 % de los estudiantes resolvieron situaciones problema concretas que involucraron el manejo de múltiplos y submúltiplos del metro Los estudiantes empezaron a asociar unidades de media con longitudes de objetos de manera coherente y asertiva, sin embargo se presentaron algunas falencias en la parte operativa cuando realizaban una multiplicación o división.
	<b>IR</b>	<b>MM .2.5</b>		2	El 85,7% de los estudiantes relacionaron longitudes de objetos con unidades del S.I
	<b>DEC</b>	<b>MM .2.6</b>		5-6	El 85,7 % de los estudiantes realizaron conversiones de múltiplos a submúltiplos y de submúltiplos a múltiplos.

<b>Promedio de porcentaje de los resultados de la categoría MM</b>	<b>84,2 %</b>
--	---------------

Tabla 8

*Aciertos y Dificultades de la Guía 1 y Guía 2 de la Categoría MM*

<b>Aciertos</b>	<b>Dificultades</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Los estudiantes siguieron las instrucciones planteadas en cada guía.</li> <li>- Las instrucciones de cada una de las actividades fueron claras para el estudiante.</li> <li>-Los estudiantes reconocieron el S.I (sistema internacional) como un sistema estandarizado.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-El tiempo planteado inicialmente para la Guía 1, sesión 1 no fue lo estipulado inicialmente pues llevó dos sesiones de clase debido a los desplazamientos y las diferentes estrategias que utilizaron los estudiantes para tomar las longitudes de los objetos solicitados.</li> <li>-Se presenta dificultad cuando se pasa de una unidad de medida pequeña a una unidad de medida grande.</li> </ul>

**4.2.1.2 Guía 3: Estimación y medidas de longitud.** En la tabla 9 se presentará los resultados de la situación 2 la cual está compuesta por una guía. En la Tabla 10 se presentarán los aciertos y dificultades generales presentados por los estudiantes en el desarrollo de la situación 2.

Tabla 9

Caracterización de la Guía 3 de la Secuencia Didáctica

CATEGORÍAS		DESCRPTORES	ITE M	RESULTADOS
POR EL INVESTIGADOR	REFERENTE <i>(Véase capítulo 4)</i>		GUÍA 3	
ES	DEC	ES. 1.1	1	El 71,4% de los estudiantes realizaron estimaciones de longitudes de objetos que se encontraban en fotografías de su contexto (colegio) utilizando como referente el centímetro. Se presentó dificultad al realizar conversiones, específicamente en la parte operativa.
	IU	ES. 1.2	2	El 100 % de los estudiantes visualizaron la unidad que se iba a usar para realizar estimaciones sobreponiéndolas sobre el objeto a medir en las diferentes fotografías.
	IR	ES.1.3	4	El 85,7 % de los estudiantes estimaron longitudes de su contexto, utilizando la unidad de medida del S.I más pertinente.
	DEC	ES. 2.1	2	El 100 % de los estudiantes estimaron y aproximaron longitudes de objetos con los referentes utilizados en la guía 1. Reconocen la distinción entre estimación y aproximación.
	IR	ES. 2.2	3	El 85,7 % de los estudiantes identificaron longitudes de objetos que se encontraban en su entorno, que tuvieran la misma longitud o se aproximaran a un referente de los múltiplos o submúltiplos de la

				unidad fundamental del S.I
Promedio de porcentaje de los resultados de la categoría <b>ES</b>				<b>88,5 %</b>

Tabla 10

*Aciertos y Dificultades de la Situación 2 de la Categoría ES*

<b>Aciertos</b>	<b>Dificultades</b>
<p>Los estudiantes al estimar una medida compararon con referentes ya conocidos trabajados en la guía 1.</p> <p>- Al estimar una medida de un objeto de su contexto distribuían una unidad de medida adecuada a lo largo de la longitud.</p> <p>- Los estudiantes reconocieron los múltiplos y submúltiplos del metro del S.I al momento de realizar estimaciones.</p>	<p>- Estimar longitudes de su contexto, pues no utilizaban la unidad de medida del S.I más adecuada.</p>

**4.2.1.3 Guía 4: Fotografía y estimación.** En la tabla 11 presentará los resultados de la situación 3 la cual está compuesta por una guía. En la Tabla 12 se presentarán los aciertos y dificultades generales presentados por los estudiantes en el desarrollo de la situación 3.

Tabla 11

*Caracterización de la Guía 4 de la Secuencia Didáctica*

CATEGORÍAS		DESCRIPTORES	ITEM	RESULTADOS
POR EL INVESTIGADOR	REFERENTE (Véase capítulo 4)		GUÍA 4	
F	DEC	(F. 1.1)	1	El 71, 4 % de los estudiantes compararon en un grupo de fotografías tomadas desde diferentes distancias la longitud de un mismo objeto; sin embargo en el 28.6% impera lo perceptivo
	DEC	(F. 1.2)	2	El 85,7 % de los estudiantes realizaron estimaciones de longitudes de objetos en una fotografía de un contexto diferente al colegio, pero conocido para el estudiante.
	DEC	(F. 1.3)	3	El 85,7% de los estudiantes estimaron longitudes de objetos conocidos, pero que se encontraban en espacios desconocidos para los estudiantes.
Promedio de porcentaje de los resultados de la categoría F				<b>80,9 %</b>



Tabla 12

*Aciertos y Dificultades de la Situación 3 de la Categoría F*

Aciertos	Dificultades
<p>-Los estudiantes al reconocer en una fotografía objetos ya conocidos de su contexto estimaba con gran certeza la longitud solicitada</p> <p>-Los estudiantes al identificar en una fotografía objetos no conocidos (que no hacen parte de su contexto), los relacionaba con objetos ya trabajados (la puerta del salón de clase, respecto a una puerta que se encontraba en un contexto no conocido) estimaban de manera asertiva la longitud solicitada.</p>	<p>- Dificultad en la observación de un conjunto de fotografías tomadas desde diferentes distancias</p>

**4.2.2. Discusión.** Después de aplicada la secuencia didáctica y las respuestas dadas a las diferentes preguntas se confronto con el marco de referencia para cada una de las categorías planteadas.

Categoría MM (Magnitud y Medida)

Para Callis (2002), la capacidad de medida necesita de la adquisición del espacio y del número, además para el dominio de la medida se requieren de tres factores: adquisición de la magnitud, adquisición de la medida y la adquisición de la unidad. Frente a estos factores los resultados obtenidos en la guía 1 y la guía 2 el 84, 2 % de los estudiantes identificaron y reconocieron la magnitud, tuvieron conservación de la misma y establecieron una relación entre magnitud y número. Respecto a la adquisición de la unidad hubo una interiorización del concepto de unidad y tuvieron la capacidad de usar la unidad como elemento de comparación.

Por otro lado, teniendo en cuenta los componentes que propone Inskeep (1976) para la medición, dentro de los cuales se encuentran las actividades de carácter afectivo, es decir que los estudiantes aprecien el papel que la medición juega en sus vidas y en la sociedad, una vez aplicada la secuencia se observó que la fotografía jugó un papel fundamental para que los estudiantes tuvieran la experiencia en las áreas de la medición y que fueran capaces de estimar consistentemente.

#### Categoría **ES (Estimación)**

Dentro de las falencias encontradas en la prueba diagnóstica, respecto a las habilidades para estimar propuestas por Bright (1976), específicamente a la habilidad que desarrolla un estudiante cuando utiliza la medición como método de comprobación, se evidenció que los estudiantes a partir de lo planteado en el ítem número 6 de la guía 1, tomaron conciencia de la importancia de comprobar sus diferentes estimaciones de tal manera que un 88,5 % de los estudiantes tuvieron la capacidad de seleccionar y utilizar las estrategias adecuadas para hacer estimaciones y aproximaciones.

Otras habilidades y conceptos que se pudieron evidenciar en el desarrollo de la guía 3, según lo propuesto por Hildrech (1983), fue la comprensión del concepto de unidad mediante una imagen mental de la unidad a través de la fotografía, realizando comparaciones entre objetos e iteraciones de esa unidad, desarrollando en los estudiantes la capacidad de comprobar la idoneidad de la estimación.

#### Categoría **F (Fotografía)**

Respecto a las directrices planteadas por Callis (2006) para la enseñanza y aprendizaje de la estimación, se observó que a través de las diferentes actividades

realizadas en cada una de las situaciones, los estudiantes le dieron sentido a la estimación en la realidad utilizando como herramienta la fotografía matemática, pues como lo menciona Munárriz (1999) son imágenes que reproducen la realidad exactamente tal y como es; así mismo, los estudiantes conocieron las medidas tradicionales de su propio entorno y su utilidad relacionándolas con el S.I, desarrollando capacidades analíticas de composición y descomposición, estableciendo criterios de interrelación y equivalencia métrica entre diferentes unidades.

## 5. Conclusiones

Cuando se concluye una etapa en la cual está implícito un proceso de reflexión y de formación profesional se puede decir que el papel que juega el conocimiento matemático del profesor y sus diferentes estrategias didácticas, específicamente para esta investigación la fotografía, es fundamental para una mayor familiarización y aceptación por parte de los estudiantes de las matemáticas y particularmente de la estimación de las medidas de longitud

El objetivo general propuesto en esta investigación es *determinar cómo incide el uso de la fotografía como propuesta didáctica, en el aprendizaje de la estimación, específicamente en la medida de longitudes, en estudiantes de grado décimo del (I.E.D) Colegio el Tesoro de la cumbre*. A continuación, se reflejarán los alcances de esta investigación.

### 5.1.Conclusiones

A partir del análisis de la información recogida a través de las diferentes fuentes sobre el diagnóstico y cada una de las situaciones desarrolladas con los estudiantes, se presentarán a continuación las conclusiones relacionadas con el objeto de estudio, en relación con la propuesta didáctica diseñada en el proceso investigativo y aspectos puntuales de la fotografía como propuesta didáctica de aprendizaje de la estimación en medidas de longitud.

Conocer la didáctica de la disciplina que enseña, permite identificar y construir relaciones de tipo pedagógico, teórico dentro de las matemáticas y dentro de otras ciencias, las cuales enriquecen el proceso de enseñanza aprendizaje; en éste sentido se debe asumir una actitud investigativa frente a todo lo que se aprenda y se enseñe, se observe, se escuche y experimente, como se pudo constatar con el desarrollo de éste trabajo y así ser un docente con habilidades investigativas para asumirlo como un estilo de vida dentro y fuera del aula.

A medida que los estudiantes desarrollaban cada una de las situaciones de la secuencia didáctica, mejoraban su precisión y la variación de esas precisiones dependían de las características de las longitudes de los objetos a medir, a medida que estimaban en cada fotografía su precisión mejoraba con la práctica; diversos investigadores (Siegel, 1982; Sowder, 1992; Callís, 2002) han manifestado que la magnitud longitud es una de las más adecuadas para mejorar la precisión cuando se trabaja secuencialmente un conjunto de actividades, como se pudo verificar una vez aplicada la secuencia en comparación con la prueba diagnóstica.

La investigación permitió comprobar, que los estudiantes que tienen mayor capacidad para estimar son aquellos que no tienen dificultades conceptuales asociadas a la magnitud y a su medida, y tienen dominio de ciertas componentes asociadas a la estimación como son: la interiorización de referentes y/o la interiorización de unidades de medida, y saben usar adecuadamente la estrategia elegida.

La precisión que se pudo alcanzar al estimar utilizando como propuesta la fotografía dependió fundamentalmente de dos factores, la interiorización de los referentes

o unidades de medida que se usaron, y por otra parte, la familiarización de los estudiantes con los diferentes objetos mostrados que no estaban realmente ante sus ojos, sino a través de fotografías. Esta investigación apoya entonces, la propuesta de Hildreth (1983), respecto al aprendizaje de diferentes estrategias en las escuelas; pues se pudo evidenciar que la fotografía al involucrar el uso de referentes, aumentó en los estudiantes su capacidad de estimación.

Mediante la comparación entre los resultados del diagnóstico y la secuencia didáctica, se ha comprobado la incidencia de la práctica en diferentes aspectos de la capacidad estimativa. La precisión desarrollada en las estimaciones mejoró notablemente las capacidades analíticas de composición y descomposición en los estudiantes a través del desarrollo de la secuencia didáctica, evidenciado con una considerable disminución en las falencias presentadas en primera instancia. Por tanto, la investigación verificó que la capacidad estimativa mejora con la práctica, ya puesta de manifiesto por investigadores: Bright (1976), Callís (2002) quienes afirmaban, por una parte, que la enseñanza de la estimación no se refuerza lo suficiente en las escuelas y por otra parte, la importancia de practicar: “la formación académica no potencia la adquisición de capacidades de estimación métrica... la capacidad estimativa se adquiere fundamentalmente por la práctica y la incidencia de la formación académica resulta ser poco significativa para dicha adquisición” (Callís y Fiol, 2006, p. 111).

La fotografía como herramienta de aprendizaje de la estimación constituye un campo de entrenamiento para el manejo de conceptos y destrezas relativos a la magnitud y a su medida (percepción y comparación), al mismo tiempo que constituye un campo de trabajo que permite detectar deficiencias conceptuales y procedimentales básicas

(conversión de medidas, reconocimiento del sistema internacional, estimación en cálculo) coincidiendo en las ideas de aquellos investigadores que ven la estimación como una herramienta útil para la enseñanza de otros conceptos (Bright, 1976; Segovia et al. 1989; Whitin, 2004).

La principal ventaja de la metodología utilizada es que permitió adaptar la instrucción tanto al punto de partida como al ritmo de aprendizaje de los estudiantes. Situación que se consideró en el diseño de cada una de las situaciones. (*Véase tabla 5*). Los inconvenientes más destacados de esta metodología son los siguientes: En primer lugar, que como el diseño de cada sesión necesitaba de un proceso de retroalimentación de la situación anterior, reflexión y conexión con los contenidos teóricos existentes fue necesario disponer de un espacio de tiempo considerable entre situación y situación.

El hecho de que el profesor sea uno de los investigadores puede ser considerado una limitación, pues la investigación puede influir en su docencia. En este sentido se tuvo presente que el desarrollo de esta investigación no debía influir en el trabajo diario que se desarrollaba en el aula. Bajo esta premisa la fórmula del profesor-investigador pudo convertirse en una ventaja, pues se pudo controlar que aprendizajes estaban recibiendo los estudiantes al margen del trabajo empírico propio de la investigación. Finalmente se pone de manifiesto que esta metodología permite avanzar en sus conocimientos tanto al profesor como a los estudiantes.

## 5.2.Recomendaciones

Esta investigación tiene como aporte fundamental la fotografía como propuesta didáctica del aprendizaje de la magnitud longitud, sin embargo, se mencionarán algunas de las conjeturas que surgieron durante el desarrollo del trabajo para futuros estudios:

-En las fotografías en donde se observaban longitudes que no necesariamente eran rectas, los estudiantes presentaban dificultad (el valor estimado estaba muy por debajo del valor real de la longitud) al compararlas con un referente de medida.

-A los estudiantes se les dificultó estimar longitudes en las fotografías en donde la longitud estaba en posición horizontal.

- Los estudiantes presentaron dificultades de precisión cuando estiman longitudes de objetos en fotografías que tuviesen forma irregular, pues como ya tenían diferentes estrategias para realizar estimaciones de longitudes de objetos los cuales podían asociar con un cuadrilátero (ventanas, puertas, baldosas, tableros, rejas, entre otros) al estimar longitudes de objetos que en su forma diferían de una figura plana conocida (la carcasa de una lámpara que se encontraba en un poste, la cual tenía una longitud curva) se les dificultaba realizar estimaciones

- Por otro lado, una vía de estudio que se deja abierta sería analizar si la fotografía como propuesta didáctica es pertinente para el aprendizaje de otras magnitudes; ya que se demostró a través de esta investigación que la aplicación de dicha propuesta en el aprendizaje de la magnitud longitud desarrolló en los estudiantes capacidades de composición y descomposición que constituyen el punto partida para el estudio de superficie y volumen.



Sobre fortalezas del uso de dicha estrategia

Sobre dificultades o errores en los que se puede incurrir si se hace uso inadecuado de dicha estrategia

### **5.3.Limitaciones del estudio**

La característica del grupo de estudiantes seleccionados para esta investigación ha limitado el potencial de la misma, sobre todo en lo relativo a la magnitud y medida, pues la falta de dominio conceptual y procedimental por parte de los estudiantes para estos conceptos, ha limitado la posibilidad de explorar la aplicación de esta propuesta para el aprendizaje de longitudes que no eran necesariamente rectas. Esta falta de dominio ha provocado que en muchas de las tareas de estimación no se pudieran valorar la manera como se interiorizó la unidad de medida o referentes e incluso los pasos que los estudiantes siguieron para llegar al resultado, pues no era claro la manera como habían pensado o los razonamientos que habían llevado a cabo para llegar a la solución.

### Referencias

- Agudelo, Y. (2013). *La modelación: una posibilidad para desarrollar la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen en estudiantes de grado 9º*. (Tesis de Maestría.) Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia.
- Bressan, A. y Yaksich, F. (2001) *La enseñanza de la medida en la educación general básica*. Campana Argentina. UNESCO
- Benton, S. (1986). *A Summary of Research on Teaching and Learning Estimation*. En: N.C.T.M. Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1986, pp. 239-248.
- Castillo, J. (2006). *Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, y Superficie, Capacidad y Masa*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España
- Castillo, J. (2012). *Estimación de Cantidades Continuas: Longitud y Superficie*. (Tesis de doctoral). Universidad de Granada, España
- Chamorro, M. y Belmonte, J. (1988). El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. Síntesis. Madrid.
- Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.
- Frías, A., Gil, F., y Moreno, M. (2001). *Introducción a las magnitudes y medidas. Longitud, masa, amplitud, tiempo*. Rn E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

- Gamboa R. y Ballesteros, E. (2009). *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría*.4 (5), 113- 136. Recuperado de <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6915>
- Godino, J., Batanero, C., y Roa, R. (2002). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Universidad de Granada. 615-616.
- Gómez, M. (2011). Pensamiento Geométrico y Métrico en las Pruebas Nacionales. (Tesis de maestría), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Holmes, E. (1975) *Teach Estimation? Of Course! Arithmetic Teacher*. Vol. 22 (5), pp. 367-369.
- Kemmis, S., McTaggart, R. (1988). Cómo planificar la investigación-acción, Barcelona: Laertes. Recuperado de [https://www.uam.es/personal\\_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso\\_10/Inv\\_accion\\_trabajo.pdf](https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/Inv_accion_trabajo.pdf)
- López, O., y García, S. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Recuperado de <http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares, Matemáticas*. Ed. Libros y libros, Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. MEN. Bogotá, Colombia.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 29 (1), pp. 75-88.

Morales, C., y Majé, R.(2011). *Competencia Matemática Y Desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros*. (Tesis de maestría).Universidad de la Amazonia, Colombia.

Munarriz, J. (1999). *La Fotografía como objeto. La relación entre los aspectos de la Fotografía considerada como objeto y como representación*. (Tesis de Maestría.) Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Pizarro Contreras, R. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria*. (Tesis doctoral).Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Ortiz, M. (1999). *La investigación en Educación Matemática en Colombia, 1991–1999*. Recuperado de <http://portales.puj.edu.co/didactica/PDF/EstadosdeArte/EducacionMatematicasMarinaOrtiz.pdf>

Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.) (2013). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*. Granada, España: Editorial Comares.

Rodríguez, Y. (2010) *Actividades para desarrollar la habilidad de estimar, con las unidades de longitud en escolares de 5° grado de la educación primaria*. Revista

Varela, N. 27 septiembre-diciembre. Universidad de ciencias pedagógicas Félix Varela.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis. Madrid.

Segovia, I., y De Castro, C. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano*. Encarnación Castro y José L. Lupiañez. Granada: Editorial Universidad de Granada, pp. 213-236.


Siegel, A. W., Goldsmith, L. T. y Madson, C. R. (1982). *Skill in estimation problems of extent and numerosity*. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 13 (3), pp. 211-232.

Soto Acevedo, A. (2013). *El papel de la geometría analítica en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

## Anexos

### Anexo 1

#### Prueba Diagnóstica

<p>COLEGIO EL TESORO DE LA CUMBRE (I.E.D) J.M</p>  <p>AREA DE MATEMATICAS GRADO DECIMO DOCENTE : MIGUEL ALEJANDRO NITOLA</p>	<p>Universidad <b>Externado</b> de Colombia</p> <p>UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA FACULTAD DE EDUCACIÓN MAESTRÍA EN EDUCACIÓN</p>
---	--

#### PRUEBA DIAGNÓSTICA CAPACIDAD ESTIMATIVA DE LONGITUD COMO CANTIDAD CONTINUA.

**Nombre y Apellidos:** ..... **Curso:...**10.....

Realiza de manera individual los ejercicios que se te plantean a continuación. En cada uno de ellos se pide que se realice una estimación, esto significa, dar el resultado de la medida de un objeto sin utilizar ningún instrumento de medida.

**1** ¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?

**Solución:** La mesa del profesor mide ..... de largo

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución:

2. Mida el “largo” y el “ancho” del siguiente rectángulo y escriba cuánto miden. (Utilizar la unidad de medida que consideres más adecuada).



Largo: .....

Ancho:.....

3. Observe la siguiente fotografía, e identifique un objeto que se encuentre en la misma del cual usted tenga una aproximación de su longitud.



¿Conoce el sitio en el cual está tomada la fotografía? De ser afirmativa la respuesta escriba el nombre del lugar \_\_\_\_\_

¿Qué objeto identificó? \_\_\_\_\_

¿Cuál es su longitud? \_\_\_\_\_

¿Qué experiencia tuvo para determinar la longitud de dicho objeto?



4. Mencionar tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 decímetro<sup>9</sup> (dm).

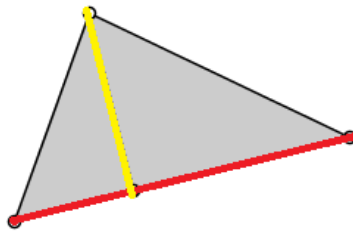
**Objetos que miden aproximadamente. 1 dm:**

Objeto 1 \_\_\_\_\_

Objeto 2 \_\_\_\_\_

Objeto 3 \_\_\_\_\_

5. Mida en el siguiente triángulo la base (segmento de color rojo) y la altura<sup>10</sup>(segmento de color amarillo) del mismo. (Utilizar la unidad de medida que consideres más adecuada).



Longitud de la Base: .....

Longitud de la Altura: .....

---

<sup>9</sup> El decímetro es un submúltiplo del metro su equivalencia es:  $\text{metro}(m) = 10 \text{ decímetros}(dm)$

<sup>10</sup> La altura de un triángulo es el segmento perpendicular a un lado que va desde el vértice opuesto a este lado (o a su prolongación).

6. Observe la siguiente fotografía y a partir del objeto referenciado en el punto 3, utilícelo para estimar el objeto que se encuentra encerrado de rojo.



¿Conoce el sitio en el cual está tomada la fotografía?. De ser afirmativa la respuesta escriba el nombre del lugar\_\_\_\_\_

La longitud del objeto encerrado respecto a mi objeto de referencia es

\_\_\_\_\_

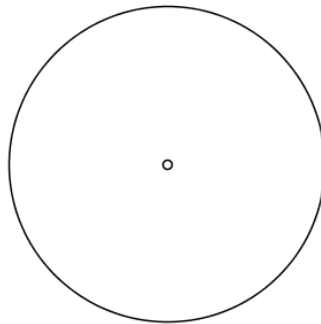
Hay objetos dentro de la fotografía que tienen la misma longitud del objeto encerrado, si los hay enciérrelos de un color diferente

7. ¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que está escribiendo? (Utilizar la unidad de medida que consideres más adecuada)

**Solución:** El grosor de la mesa del profesor es de.....

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución.

8. Mida el radio<sup>11</sup> y la longitud de la circunferencia. (Utilizar la unidad de medida que consideres más adecuada). Explicar el procedimiento que ha seguido para medir



Longitud del Radio: .....

Longitud de la Circunferencia:.....

¿Cómo ha medido la circunferencia?

\_\_\_\_\_

<sup>11</sup> Cualquier segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.

9. A partir del objeto referenciado en el punto 3 utilícelo para estimar la altura de la casa que se encuentra delineada de color rojo.



¿Conoce el sitio en el cual está tomada la fotografía?. De ser afirmativa la respuesta escriba el nombre del lugar\_\_\_\_\_

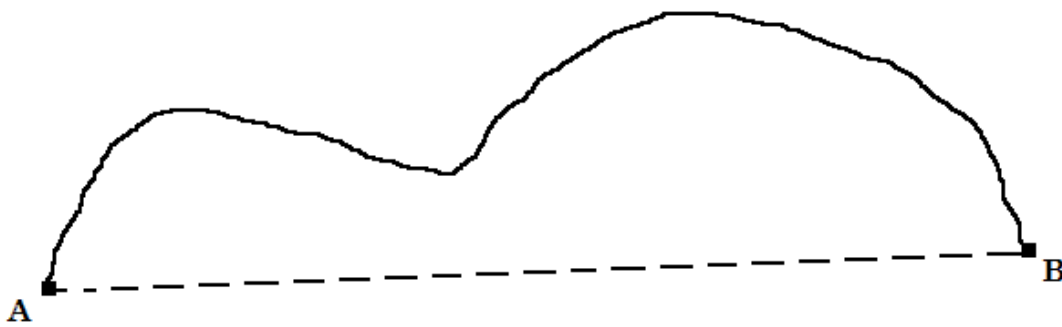
La altura de la casa respecto a mi objeto de referencia es \_\_\_\_\_

Hay objetos dentro de la fotografía que tienen la misma longitud del objeto encerrado, si los hay enciérrelos de un color diferente

10. Mencionar tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 metro (m).

**Objetos que miden aprox. 1 m:**

11. En el siguiente dibujo aparece en línea continua la “trayectoria” que ha seguido una hormiga para ir del punto A al punto B. Mide la trayectoria de la hormiga y la distancia entre los puntos A y B, y compáralas.



La trayectoria mide: .....

La distancia entre A y B es: .....

Comparación: .....

.....

12. ¿Cuánto mide aproximadamente (de ancho) el bibliobanco del salón de clases?

**Solución: El bibliobanco mide..... de ancho**


Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución:

**13.**¿Qué longitud aproximada hay entre las lámparas y el techo del salón de clases?

**Solución:** La longitud aproximada entre la lámpara y el techo es de.....

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución:

**Anexo 2****Guía 1: Medidas de Longitud.**

<p>COLEGIO EL TESORO DE LA CUMBRE (I.E.D) J.M</p>  <p>AREA DE MATEMATICAS GRADO DECIMO DOCENTE : MIGUEL ALEJANDRO NITOLA</p>	<p>Universidad <b>Externado</b> de Colombia</p> <p>UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA FACULTAD DE EDUCACIÓN MAESTRÍA EN EDUCACIÓN</p>
---	--

**GUIA1: MEDIDAS DE LONGITUD.**

**Nombre y Apellidos:** ..... **Curso:...**10.....

Realiza de manera individual los ejercicios que se te plantean a continuación.

1. Utilice como referente la siguiente fotografía para identificar en su entorno los objetos demarcados de color rojo, verde, amarillo y negro; a continuación utilizando como unidad de medida el dedo índice de su mano escriba la longitud de cada objeto.

La longitud de color  es de \_\_\_\_ índices derechos

La longitud de color  es de \_\_\_\_ índices derechos

La longitud de color  es de \_\_\_\_ índices derechos

La longitud de color  es de \_\_\_\_ índices derechos

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución



2. Escribe 5 objetos que se encuentren dentro del colegio, que tengan la misma longitud o se aproximen<sup>12</sup> a la longitud de su dedo índice.

**Objeto 1**\_\_\_\_\_ **Objeto 2**\_\_\_\_\_ **Objeto 3**\_\_\_\_\_

**Objeto 4**\_\_\_\_\_ **Objeto 5**\_\_\_\_\_

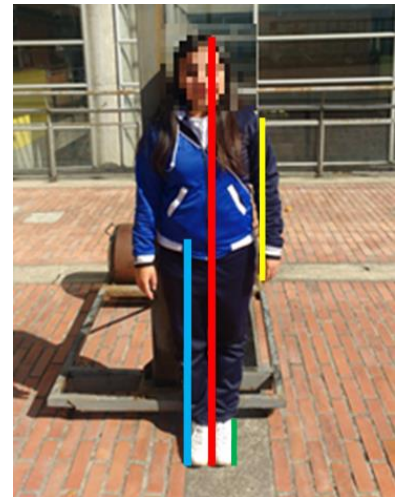
3. Utilice como referente la siguiente fotografía para medir algunas partes de su cuerpo como la longitud del brazo (amarillo), la longitud de la cintura hasta los pies (azul), su estatura (rojo), la longitud de su pie (verde) utilizando como unidad de medida el dedo índice de su mano.

La longitud del brazo es de \_\_\_\_\_ índices derechos

La longitud de su cintura hasta los pies es de \_\_\_\_\_ índices derechos

Su estatura es de \_\_\_\_\_ índices derechos

La longitud de su pie es de \_\_\_\_\_ índices derechos



Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

---

---

---

---

<sup>12</sup> Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado.



4. Utilizando las longitudes del cuerpo mencionadas en el punto tres realice las siguientes conversiones.

La longitud del brazo \_\_\_\_\_ la longitud del pie

La longitud de la cintura a los pies \_\_\_\_\_ la longitud del pie

La longitud del pie \_\_\_\_\_ su estatura.

Su estatura \_\_\_\_\_ la longitud del pie.

La longitud de la cintura a los pies \_\_\_\_\_ la longitud del brazo

La longitud del brazo \_\_\_\_\_ su estatura

Su estatura \_\_\_\_\_ la longitud del brazo.

La longitud del brazo \_\_\_\_\_ la longitud de la cintura a los pies

Su estatura \_\_\_\_\_ la longitud de la cintura a los pies

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

---

---

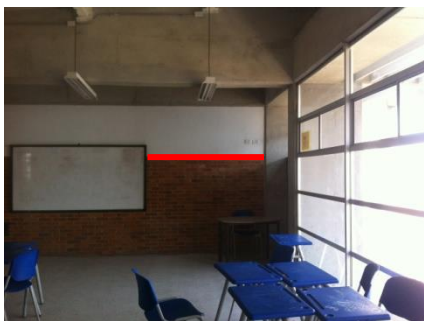
---

---

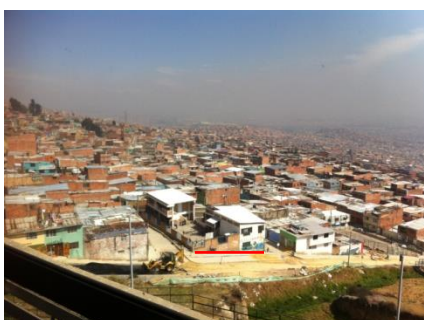
---

---

5. Observa las siguientes fotografías e identifica las unidades de medida (la longitud del brazo, la longitud de la cintura hasta los pies, su estatura, la longitud de su pie, la longitud del dedo índice) que considere más pertinente para medir las longitudes de color rojo de cada fotografía.



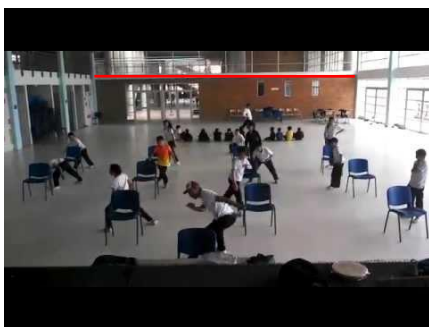
La unidad de medida más pertinente  
es \_\_\_\_\_ porque:



La unidad de medida más pertinente  
es \_\_\_\_\_ porque:



La unidad de medida más pertinente  
es \_\_\_\_\_ porque:



La unidad de medida más pertinente  
es \_\_\_\_\_ porque:



La unidad de medida más pertinente es \_\_\_\_\_ porque:



La fotografía corresponde a una parte de la mesa del profesor; La unidad de medida más pertinente medir la longitud del radio del tornillo de la mesa es \_\_\_\_\_ porque:

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

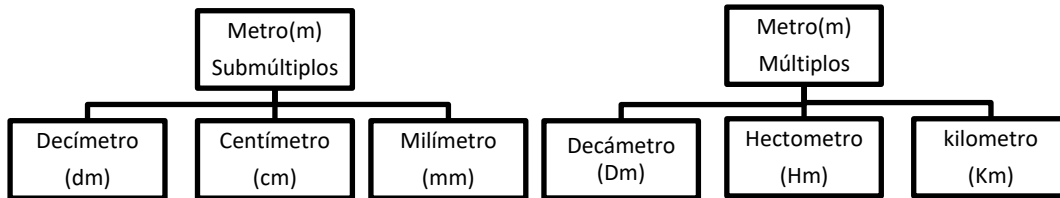
¿Las unidades de medidas que se utilizaron fueron las adecuadas para medir las longitudes de los objetos de las fotografías anteriores?. Explique su respuesta.

Si ahora se pensara en la longitud que hay desde el punto en el cual se encuentra hasta la puerta de su casa.  
¿Las unidades de medida que hay hasta el momento bastan para poderlos hacer?  
¿Qué solución da si se desea calcular esta distancia?

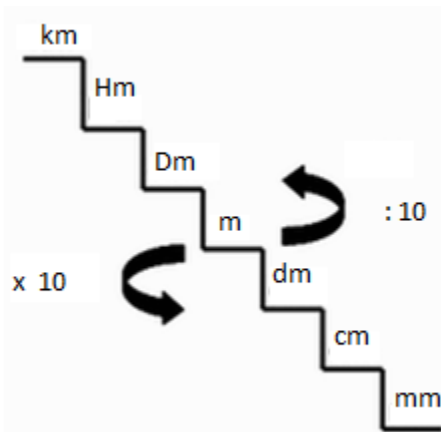
6. Tenga en cuenta la siguiente información para el desarrollo de la siguiente actividad:

Para medir longitudes en el S.I se emplea, como unidad principal, el Metro.

### Múltiplos<sup>13</sup> y Submúltiplos<sup>14</sup> del Metro



Fuente: Elaboración propia con base a Chamorro, C y Belmonte, J.M. (1991).



Para transformar unas unidades en otras se multiplica por diez cada vez que se baje un escalón, y se divide entre diez cada vez que se suba un escalón.

Para subir o bajar más de un escalón, se dividirá o multiplicará por diez cada escalón:

2 escalones:  $(10) (10) = 100$

3 escalones:  $(10) (10) (10) = 1.000$

Por ejemplo: si estamos en el escalón **m** y se quiere ir al escalón **cm** se multiplica por 100. Si se tiene 34 m quedan 3.400 cm

Con los instrumentos que le acaban de entregar (la regla graduada en centímetros y el metro) realiza las siguientes conversiones:

<sup>13</sup> El metro es una unidad demasiado pequeña para medir algunas distancias. En estos casos se utilizan los múltiplos del metro, que son unidades mayores. Colocados de mayor a menor, son los siguientes:

kilómetro 1 km = 1.000 m ; Hectómetro 1 Hm = 100 m ; Decámetro 1 Dm = 10 m

<sup>14</sup> Para pequeñas distancias se necesitan unidades menores que el metro, estas unidades son los submúltiplos del metro. Colocados de mayor a menor, son:

decímetro 1 dm = 0,1 m ; centímetro 1 cm = 0,01 m ; milímetro 1 mm = 0,001 m

La longitud del brazo \_\_\_\_\_centímetros (cm)

La longitud de su cintura hasta los pies es \_\_\_\_ centímetros (cm)

Su estatura es \_\_\_\_ centímetros (cm)

La longitud del índice derecho\_\_\_\_ centímetros (cm)

La longitud de su pie es \_\_\_\_ centímetros (cm)

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado, razonamientos o procedimientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

7. Utilizando la fotografía del punto 1 calcule la longitud de los objetos demarcados de color rojo, verde, amarillo y negro; exprese su longitud en centímetros (cm).

La longitud de color  \_\_\_\_ centímetros (cm)

La longitud de color  \_\_\_\_ centímetros (cm)

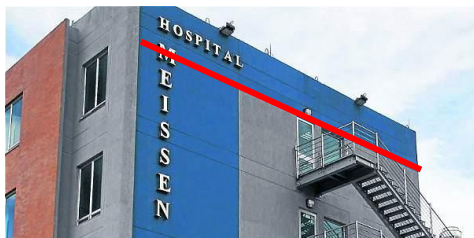
La longitud de color  \_\_\_\_ centímetros (cm)

La longitud de color  \_\_\_\_ centímetros (cm)



Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado, razonamientos o procedimientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

8. Observa las siguientes fotografías e identifica las unidades de medida (múltiplos y submúltiplos del metro) que considere más pertinente para medir las longitudes de color rojo de cada fotografía.



El múltiplo o submúltiplo del metro más adecuado es \_\_\_\_\_ porque:



El múltiplo o submúltiplo del metro más adecuado es \_\_\_\_\_ porque:



El múltiplo o submúltiplo del metro más adecuado es \_\_\_\_\_ porque:





El múltiplo o submúltiplo del metro más adecuado es \_\_\_\_\_ porque:



El múltiplo o submúltiplo del metro más adecuado es \_\_\_\_\_ porque:

**Guía 2: Aplica lo Aprendido**

COLEGIO EL TESORO DE LA CUMBRE (I.E.D) J.M  AREA DE MATEMATICAS GRADO DECIMO DOCENTE : MIGUEL ALEJANDRO NITOLA	 UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA FACULTAD DE EDUCACIÓN MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
---	---

**GUIA2: MEDIDAS DE LONGITUD.**

**Nombre y Apellidos:** ..... **Curso:...**10.....

**¡Aplica lo aprendido!**

- Juan quiere cortar cintas de tres decímetros de longitud de un rollo de doce metros.  
¿Cuántas cintas puede hacer?

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

- Relaciona el objeto con la unidad de medida que utilizaría para medirlo:

- |                          |              |
|--------------------------|--------------|
| - El grosor de una uña   | · decímetro  |
| - El largo de un dedo    | · metro      |
| - El ancho de tu espalda | · milímetro  |
| - El largo de tu pierna  | · centímetro |

- Dos pescadores compran un carrete de hilo de pesca. Uno es de 3,5 Dm y el otro de 50 m. ¿Qué carrete tiene más hilo?

- Transforma estas longitudes en metro y ordénalas de menor a mayor:

1400 mm      1,3 m      135 cm      12 dm      137,5 cm



Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

5. Completar la tabla según el ejemplo:

	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm		
17 m 4 dm			1	7	4			174	dm
17 m 4 dm									cm
17 m 4 dm									m
17 m 4 dm									Km

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

6. Completa.

- a) 8 km = ..... m    d) 3 Dm = ..... m    g) 6 Hm = ..... Dm  
 b) 3 m = ..... cm    e) 10 m = ..... dm    h) 500 m = ..... Hm  
 c) 7 cm = ..... mm    f) 800 cm = ..... m    i) 20 000 m = ..... km

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

7. Felipe y su padre miden la longitud del largo de una mesa respecto a la longitud del dedo índice. Felipe obtiene 13 dedo índices y su padre 9 dedos índices. Luego



comprueban con un metro que la mesa mide 234 cm. ¿Cuánto mide el dedo índice de Felipe? ¿Y el de su padre?

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

8. Para medir la pista de atletismo, Rodrigo ha utilizado un curioso instrumento de medida que está formado por una rueda de longitud conocida y un contador de vueltas. Si la rueda mide 0,8 m y el contador marca 125 vueltas, ¿cuánto mide la pista?

Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar al resultado, en donde se especifique todo aquello en lo que ha pensado o los razonamientos que ha llevado a cabo para llegar a la solución

**Anexo 3****Guía 3: Estimación y Medidas de Longitud**

COLEGIO EL TESORO DE LA CUMBRE (I.E.D) J.M  AREA DE MATEMATICAS GRADO DECIMO DOCENTE : MIGUEL ALEJANDRO NITOLA	 UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA FACULTAD DE EDUCACIÓN MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
---	---

**GUIA 3: Estimación y Medidas de Longitud**

**Nombre y Apellidos:** ..... **Curso:...**10.....

Realiza de manera individual los ejercicios que se te plantean a continuación.

1. Estime las longitudes (segmentos de color rojo) que se encuentran en cada fotografía, tenga en cuenta las indicaciones que se dan en el rectángulo que se encuentra contiguo a la fotografía.( Escribir al lado de cada fotografía la longitud de la estatura de cada uno de los estudiantes , esta se socializará en el desarrollo de la actividad)



La estatura de mi compañero es de \_\_\_\_\_(cm)

Al realizar la estimación de la longitud de la reja  
(segmento de color rojo) su longitud es de \_\_\_\_\_cm

Estatura \_\_\_\_\_cm



La estatura de mi compañera es de \_\_\_\_\_(m)

Al realizar la estimación de la longitud de la base que  
sostiene la malla de la cancha (segmento de color rojo)  
su longitud es de \_\_\_\_\_m

Estatura \_\_\_\_\_cm



La estatura de mi compañera es de \_\_\_\_\_(mm)

Al realizar la estimación de la longitud del marco de la  
puerta (segmento de color rojo) su longitud es de  
\_\_\_\_\_mm



Estatura \_\_\_\_\_ cm

La estatura de mi compañera es de \_\_\_\_\_ (m)

Al realizar la estimación de la longitud de la altura de la pared (segmento de color rojo) su longitud es de \_\_\_\_\_ Dm



Estatura \_\_\_\_\_ cm

La estatura de mi compañera es de \_\_\_\_\_ (m)

Al realizar la estimación de la longitud de la altura de la columna (segmento de color rojo) su longitud es de \_\_\_\_\_ Hm

2. Estime las longitudes (segmentos de color amarillo) que se encuentran en cada fotografía, a partir de las indicaciones que se dan a continuación:
- A partir de la unidad de medida (segmento de color azul), asóciela a una parte de su cuerpo (la longitud del dedo índice de su mano, estatura, la longitud del brazo, longitud de su cintura hasta los pies y la longitud de sus pies, las cuales fueron trabajadas en la guía anterior )
  - Responda lo solicitado en cada recuadro.

FOTOGRAFIA 1



La unidad de medida se asocia con \_\_\_\_\_, la cual mide \_\_\_\_\_

Al realizar la estimación de la longitud de amarillo es de \_\_\_\_\_m

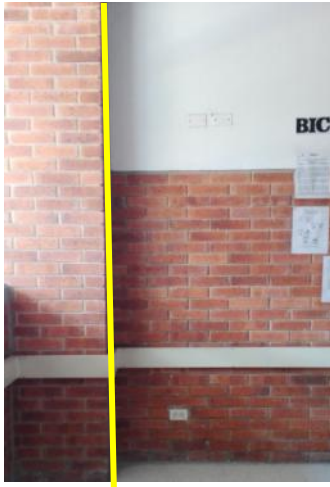


FOTOGRAFIA 2

La unidad de medida se asocia con \_\_\_\_\_, la cual mide \_\_\_\_\_

Al realizar la estimación de la longitud de amarillo es de \_\_\_\_\_m

En las siguientes fotografías realice la estimación de la longitud solicitada (amarilla) según las indicaciones dadas en el recuadro



Tome como referencia la unidad de medida de la  
**Fotografía 1** la longitud de la pared es de \_\_\_\_\_(m)



Tome como referencia la unidad de medida de la  
**Fotografía 2** la longitud de la reja es de \_\_\_\_\_(m)

3. En las siguientes fotografías, encierre la longitud de un objeto u objetos los cuales tenga la misma o se acerque a la longitud de los referentes que se ha utilizado hasta el momento (la longitud del brazo, longitud de su cintura hasta los pies, su estatura, la longitud de su pie y la longitud del dedo índice).



La longitud(es) encerrada tiene la misma o se acerca a la longitud de \_\_\_\_\_



La longitud(es) encerrada tiene la misma o se acerca a la longitud de \_\_\_\_\_



La longitud(es) encerrada tiene la misma o se acerca a la longitud de \_\_\_\_\_



La longitud(es) encerrada tiene la misma o se acerca a la longitud de \_\_\_\_\_



La longitud(es) encerrada tiene la misma o se acerca a la longitud de \_\_\_\_\_



La longitud(es) encerrada tiene la misma o se acerca a la longitud de \_\_\_\_\_



4. En las siguientes fotografías, estime la longitud (color rojo), utilice la unidad de medida que considere más adecuada.



Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar a la estimación en donde mencione la unidad de medida que utilizó



Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar a la estimación en donde mencione la unidad de medida que utilizó



Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar a la estimación en donde mencione la unidad de medida que utilizó

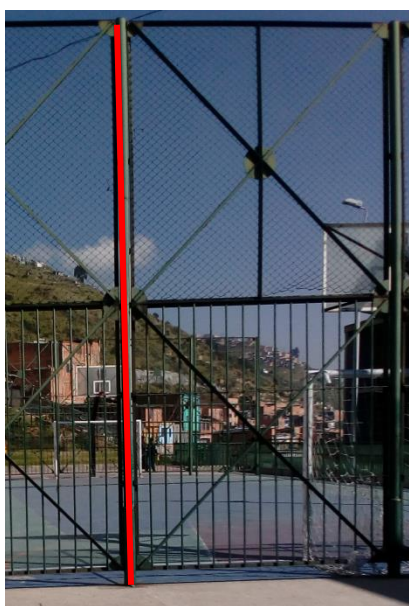




Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar a la estimación en donde mencione la unidad de medida que utilizó




Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar a la estimación en donde mencione la unidad de medida que utilizó



Escriba en este recuadro los pasos que ha seguido para llegar a la estimación en donde mencione la unidad de medida que utilizó

**Anexo 4****Guía 4: Fotografía y Estimación**

<p>COLEGIO EL TESORO DE LA CUMBRE (I.E.D) J.M</p>  <p>AREA DE MATEMATICAS GRADO DECIMO DOCENTE : MIGUEL ALEJANDRO NITOLA</p>	<p>Universidad <b>Externado</b> de Colombia</p> <p>UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA FACULTAD DE EDUCACIÓN MAESTRÍA EN EDUCACIÓN</p>
---	--

**GUIA4: FOTOGRAFÍA Y ESTIMACIÓN**

**Nombre y Apellidos:** ..... **Curso:...**10.....

1. Dado cada uno de los siguientes grupos de fotografías estime la longitud de color rojo en cada una. (Utilice la medida que considere más adecuada).

**Grupo 1**

Al comparar las estimaciones en cada fotografía. ¿Cómo son los resultados?

**Grupo 2**

Al comparar las estimaciones en cada fotografía. ¿Cómo son los resultados?



An aerial photograph of a park area. In the foreground, there is a large green lawn with a winding red brick path. A group of people is gathered on the lawn. To the right, there are two basketball courts with green and black surfaces. A playground with colorful equipment is located in the center. In the background, there is a dense urban area with many small, colorful buildings. A white bus is visible on a road near the park. A red line is drawn across the top right corner of the image.

La longitud \_\_\_\_\_ es de: \_\_\_\_\_

La longitud \_\_\_\_\_ es de: \_\_\_\_\_

La longitud \_\_\_\_\_ es de: \_\_\_\_\_

La longitud \_\_\_\_\_ es de: \_\_\_\_\_

La longitud \_\_\_\_\_ es de: \_\_\_\_\_

La longitud \_\_\_\_\_ es de: \_\_\_\_\_

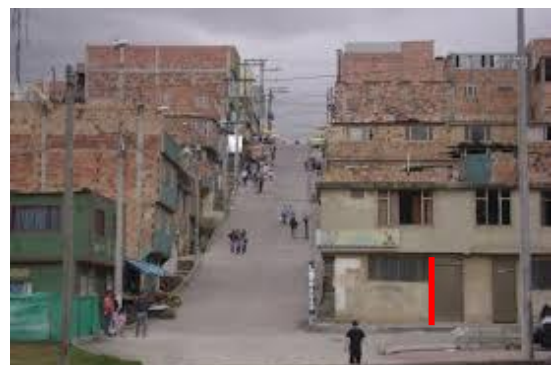
3. Estime la longitud de color rojo en cada fotografía



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_





## **Anexo 5**

### **Observaciones de la Pertinencia de las Actividades con el Trabajo de Investigación**

#### **Experto 1**

##### **Actividad 1 “Situación didáctica medidas de longitud”**

El planteamiento de la actividad es pertinente para el objetivo de introducir los diferentes múltiplos de medida del sistema decimal y uso de diferentes patrones de medida, las situaciones que se presentan se ajustan a los objetivos de conversión de unidades. Se anexan dichas sugerencias por medio de comentarios en el documento de la actividad.

##### **Actividad 2. “Situación didáctica estimación y medidas de longitud”**

Es una actividad interesante puesto que relaciona elementos del contexto próximo de los estudiantes con el uso de diferentes patrones de medida y la estimación de longitudes a partir de los mismos, lo cual cumple con los objetivos del trabajo de investigación.

Las sugerencias que se realizan tienen que ver con: mayor visibilidad de las imágenes para los estudiantes, mejora en una de las instrucciones en algunos puntos, agregar ejemplo de escala en centímetros, puesto que por experiencia con la población sería importante recordarles previamente a cuánto (visualmente) corresponde. Se anexan dichas sugerencias por medio de comentarios en el documento de la actividad.

##### **Actividad 3. “Situación didáctica Fotografía y estimación”**

Revisando el objetivo, es muy similar al del actividad 2, considero que se le podrían agregar preguntas que permiten socializar los diferentes patrones utilizados y contrastar las respuestas de los estudiantes. Se anexan dichas sugerencias por medio de comentarios en el documento de la actividad.

Observaciones de la pertinencia de las actividades con el trabajo de investigación

## **Experto 2**

### **Actividad 1 “Situación didáctica medidas de longitud”**

Las guías dan cuenta del objetivo general de la investigación, aunque hacen falta preguntas de estimación cómo cuánto medirá, y comparaciones entre objetos de tal manera que vea la necesidad de usar un instrumento para medir cualquier objeto.

### **Actividad 2. “Situación didáctica estimación y medidas de longitud”**

Las actividades plantadas están relacionadas con los objetivos de la investigación y tienen una congruencia con la situación anterior y deja el camino para profundizar en la siguiente situación.

### **Actividad 3. “Situación didáctica Fotografía y estimación”**

Evidencia una coherencia entre las tres situaciones y retoma el objetivo principal de la investigación.

Además de lo anterior se realizan comentarios a cada situación que están adjuntos al documento.